KOMPENDIUM FOR VEKTORASSISTENTER

Vektor PROGRAMMET

Kompendium for vektorassistenter

Vektorprogrammet - Org.nr. 998744814

29. august 2014

Korrigert utgave
17. juli 2015

Forord

Dette kompendiet er skrevet for å være et hjelpemiddel for vektorassistenter når de er utplassert på ungdomsskoler. Kompendiet er i hovedsak inndelt i tre deler. Først en pedagogikkdel. Så en del for å gi innsikt i nytten av matematikk, samt en innføring i hvordan en kan lære seg å angripe problemstillinger. Til slutt tar vi for oss en gjennomgang av matematikkpensum på ungdomsskolen. Dette er versjon to av kompendiet, og vi forklarer nedenfor hva som er nytt.

Pedagogikkdelen gir en innføring i pedagogikk, samt tips til hvordan en skal takle å være i et klasserom. Det er viktig å være klar over hvilke utfordringer en kan møte, samt hva slags fokus en bør ha når en skal videreformidle kunnskap til elever. Denne delen er helt lik som i versjon en.

Den midterste delen inneholder kapitler som enten er forbedret eller helt nye. Grunnen til dette er at vi syntes noe var ufullstendig og at noe manglet. Her tar vi grundig for oss hvorfor det er nyttig å lære matematikk, uansett hvilket yrke vi kan tenke oss å jobbe med senere. Kapittelet om løsningsstrategi er helt nytt, og dette vil nok være til stor nytte for alle som leser det, uavhengig om du er student, elev, forelder eller lærer. Det er ekstremt viktig å være bevisst på hvordan vi løser problemer. I tilegg er det et kapittel med diverse oppgaver som faller utenfor pensum, men som kan være nyttige å trekke fram iblandt for å motivere elevene. Kapittelet om løsningsstrategier er inspirert av Pólyas heurestikker, som er bedre beskrevet i Roger Antonsen's bok, Logiske metoder. Oppgavene i kapittelet med tall og triks finnes også overalt på internett, i bøker osv.

Matematikkdelen er ment til å kunne gi innsikt i hva en møter på i matematikkundervisningen på ungdomsskolen. Den er delt inn i fire deler som gir en innføring i de forskjellige temaene det undervises i. Hvert tema starter med å tydeliggjøre hvilke læreplanmål det er i ungdomsskolematematikken. Kunnskapsdepartementet har ikke delt de inn på samme måte som her, der er de samlet. Vi har allikevel valgt å dele de inn, da dette gir bedre innsikt i hva det undervises i på de forskjellige trinnene. I læreplanmålene for 9.- og 10.klasse inngår også læreplanemålene for trinnene under, uten at de blir nevnt dobbelt. Hvert kapittel gjennomgår læreplanmålene i form av forklaringer og eksempler som kan brukes til å lære bort de ulike undertemaene. Noen eksempler tar trinnvis for seg hvordan en kan løse ulike problemer, og forklaringene kan gjerne brukes direkte i undervisningssituasjoner.

I enden av hvert kapittel presenterer vi oppgaver som kan gis til elevene, og de har et noe mer teknisk preg over seg enn standard ungdomsskoleoppgaver. Dette er for å vise bedre hva matematikk kan brukes til, ved å løse reelle problemer. Noen av problemene har gjerne flere forskjellige løsningsstrategier, dette er for å illustrere at matematikk er et kreativt verktøy som ikke nødvendigvis bare har en korrekt fremgangsmåte. I noen seksjoner presenterer vi også deler av videregående pensum, dette kan forklares til elever som er spesielt interesserte. Temaene er da nært knyttet til det de kan fra før, slik at de ser sammenhengen mellom det de har lært og det de skal lære senere. Denne delen er noe utbedret i versjon to.

Selv om kompendiet er rettet mot sterke realfagsstudenter som skal jobbe som assistenter i matematikkundervisningen på ungdomsskolen, kan det også være til stor nytte for bl.a. lærere, foreldre og andre. Vektorkompendiet er tilgjengelig for alle på våre nettsider, www.vektorprogrammet.no, og vi håper at så mange som mulig kan ha nytte og glede av vårt arbeid.

Pedagogikkdelen er skrevet av Geir Halland ved Program for Lærerutdanningen ved NTNU. Vi er veldig takknemlige for hans bidrag, både til kompendiet, men også for de gode kursene han tar seg tid til å holde flere ganger i semesteret.

Den avsluttende matematikkdelen er i hovedsak skrevet av Jørgen Aarstad, på vegne av Vektorprogrammet.

Kompendiet er i helhet satt sammen, redigert og utfylt av Tjerand Silde og Øistein Søvik. Øistein står også bak figurene, mens Tjerand har utført arbeidet med å lage versjon to. Johannes Bogen står bak den korrigerte utgaven fra juli, 2015. Vektorprogrammet setter stor pris på tilbakemeldinger på vårt arbeid og eventuelle kommentarer kan sendes til kompendium@vektorprogrammet.no.

Kapittel 1

Pedagogikk

1.1 Perspektiver på læring

Vår hjerne er ikke blitt større eller bedre i løpet av de siste årtusener, men likevel utvikles nye kunnskaper og avanserte metoder med utrolig fart. Teknologisk og sosial utvikling har endret de måtene vi får informasjon, kunnskaper og ferdigheter på. I eldre tider før skriftkulturen var utbredt, beundret man de som hadde lært omfattende tekster utenat. I dag vil slik memorering bli betraktet som sløsing med tid. I stedet lærer vi oss andre ting og benytter oss av apparater der vi har bygd inn en mengde av de 'kunnskapene' som man i tidligere tider brukte store mentale ressurser på å anvende. Eksemplene på slike maskiner er utallige og de færreste tenker kanskje over hvilken regnekraft man har bare i en liten lommekalkulator. Ved å bygge inn kunnskaper i form av algoritmer og konvensjoner, løser vi mengder av divisjoner eller multiplikasjoner raskt og elegant.

Med utgangspunkt i en slik betraktning om apparater med innebygd kunnskap, vil man kanskje trekke den slutning at vi ikke trenger å lære oss hva regneartene innebærer. Jo mer vi tar i bruk slike redskaper, jo viktigere er det å forstå prinsippene som gjelder for hvordan de matematiske operasjonene fungerer, og hvordan en skal tenke når en anvender dem. Vi må sette fokus på sammenhenger mellom begreper og systemer som disse operasjonene er meningsfylte innenfor. Vi må lære oss hvilken operasjon det er hensiktsmessig å utføre når vi skal løse et bestemt problem, og hva som er en rimelig eller urimelig slutning. I forbindelse med statistiske analyser, er det ikke tilstrekkelig å kunne regne ut prosentandeler og gjennomsnittstall. Noen ganger er gjennomsnittet interessant, andre ganger er det standardavviket (spredningen) som gir mest mening. Hva er et godt eller dårlig resultat uttrykt i prosent? Følgende eksempel kan illustrere at matematiske utregninger må forstås i et sosialt og kulturelt perspektiv:

> For ca. 20 år siden var jeg medlem i en gruppe som planla og gjennomførte kurs for skoleledere i fylkeskommunen. I den forbindelse gikk vi ut med en omfattende spørreundersøkelse til alle lærerne i videregående skole. De skulle blant annet ta stilling til en påstand om i hvilken grad de behersket den daglige situasjonen i klasserommet. De kunne krysse av på en sjudelt skala med ytterpunktene «svært godt» og «ikke i det hele tatt». Svarene avslørte at det tilsynelatende sto godt til, og fylkeskolesjefen kommenterte tallene med å si seg fornøyd ettersom bare 3,5 % hadde svart «ikke i det hele tatt».
>
> Ved nærmere ettertanke kan en gjøre følgende analyse. Antall lærere som svarte var ca. 900. 3,5 % utgjør da ca. 30 personer. På denne tiden dominerte allmennfag og økonomifag. Hver lærer møtte $3 - 4$ klasser hver dag. Med forbehold om at bildet blir litt skjevt for yrkesfaglige studieretninger, anslår jeg at den enkelte lærer kunne eksponere seg for nærmere 100 elever i løpet av skoledagen. Det betyr at 30 lærere daglig møter ca. 3000 elever som opplever at læreren ikke behersker den daglige situasjonen i klasserommet i det hele tatt. Er det grunn til å si seg fornøyd med resultatet da?

Selv om noen fristes til å stille spørsmål ved enkelte av antakelsene som analysen i eksempelet ovenfor bygger på, er poenget at vi må ha en forståelsesorientert tilnærming til alle de kunnskapsintensive hjelpemidlene vi har utviklet. De hjelper oss til å behandle enorme datamengder, men vi må legge mening til resultatene.

En sentral del av den planlagte læringen er koblet til undervisningen. Undervisning handler om å legge til rette for læring, og denne tilretteleggingen kan ta form av å gi oversikt, skape motivasjon, forklare komplekse resonnementer, utvikle kritisk sans, gi tilbakemeldinger på ulike arbeidskrav og oppgaver osv. Undervisningens hensikt og begrunnelse er å bidra til læring.

Vi skal derfor rette fokus mot en del sentrale vilkår og forutsetninger for læring som det er mulig å påvirke både gjennom planlegging, gjennomføring og vurdering av undervisning generelt og veiledning spesielt. Sentrale spørsmål blir: Hva styrker og hva svekker vår evne til å lære? Det bringer oss inn på forhold som læringsmiljø, relasjoner, tilhørighet, faglig innsikt, sosiale ferdigheter, innsikt i egen og andres læring, kultur, identitet osv.

1.1.1 Å LÆRE ER Å VÅGE – KULTUR

å lære betyr å forholde seg til noe som er nytt, ukjent eller komplisert. Det forutsetter at vi våger oss inn på nye og ukjente områder. Mennesket har grunnleggende og motstridende behov, som behovet for trygghet på den ene siden og behovet for vekst på den andre siden. Det er store variasjoner med hensyn til hvilke behov som dominerer. Mennesker med et dominerende vekstbehov er primært nysgjerrige, spenningssøkende, utforskende og energiske. Trygghetsbehovet derimot kan i enkelte tilfeller lede til motstand mot læring og nye oppgaver. ønsket om stabilitet og forutsigbarhet dominerer.

I tillegg kommer behovet for å beskytte selvoppfatningen. I en læringssituasjon vil det være truende for selvbildet å fremstå som 'den som ikke forstår eller den som ikke får det til'. Dette beskyttelsesbehovet kan slå ut i strategier som unnvikelse, passivitet, taushet osv. Sett i lys av at læring er bearbeiding av input, vil slik atferd være svært lite læringsfremmende. Vi må derfor unngå at læringsarenaen blir et sted der en får stimulert forsvarsbehovet. Det innebærer at de reaksjonene vi møter under læringsarbeidet blir viktige for læringslysten. Her vil lærere og læringsassistenter ha en sentral rolle når det gjelder å utvikle og påvirke læringsklimaet slik at støtte, oppmuntring og undring blir sentrale verdier.

Fra psykologiens grunnsetninger vet vi at det ukjente representerer en viss usikkerhet og frykt, selv om toleransen for usikkerhet er svært ulik hos mennesker. Forutsetningen for å lære er at en tør å prøve. Professor i psykologi Arild Raaheim ved universitetet i Bergen, uttalte følgende på et tv-program om læring: «Utover et minimum av evner og anlegg er den viktigste forutsetningen for læring troen på at du kan få det til». Denne påstanden leder opp noen interessante spørsmål for den som skal legge til rette for andres læring. Hvordan kan vi styrke troen, og hva er det som svekker den? Hva kan vi gjøre for å redusere følelsen av usikkerhet? Hva er det som holder oss fra å prøve oss på nye utfordringer? Hvilke forutsetninger må være til stede for at en skal kunne ta ut sitt potensiale?

Det første bildet henter jeg fra typiske seiersintervjuer der vinneren blir bedt om å forklare dagens suksess. Gjennom flere år har jeg lagt merke til at minst 50 % av vinnerne setter følgende uttalelse sentralt i forklaringen: «I dag fant jeg den gode følelsen.» Kanskje det var den gode følelsen som ga dem mot til å prøve alle muligheter og ta de nødvendige sjansene. I intervju som skal forklare tap får vi ofte beskrivelser som: «Jeg kjørte for feigt, og jeg torde ikke angripe portene. Vi torde ikke å stå høyt nok på banen, og vi våget for lite».

Har 'den gode følelsen' noe å bety for kvaliteten på vårt læringsarbeid, i så tilfelle ja, hvordan skaper vi denne følelsen i en gruppe? Hva må til for å våge å mislykkes, våge å stille spørsmål, våge å snu opp ned på ting, våge å bruke sunn fornuft, våge å oppmuntre andre, våge å etterleve de verdiene du tror på? Et kort svar er sosialt mot, men veien fram til det kan være lang, og du vil være avhengig av en rekke forhold i selve situasjonen.

En oppsummering av denne påstanden blir at fordi læring forutsetter aktivitet, prøving og eksponering, vil en god læringsarena kunne beskrives som et sted der det hersker en risikokultur. Det betyr at en verdsetter den som tar sjansen på å prøve seg gjennom å gi henne oppmuntring og støtte. Det er bedre med et godt forsøk enn et riktig svar. Motsatsen til en risikokultur blir det jeg vil kalle en fasitkultur. Da er det de riktige svarene som teller. For å øke læringsutbytte og styrke forståelsen må vi flytte fokuset fra løsning til læring. Det bringer oss over til neste påstand.

1.1.2 Å LÆRE ER Å PRESTERE

Denne påstanden knytter læringen opp mot det faktum at læring innebærer å forbedre eller øke evnen til å utføre bestemte oppgaver. Vi er kjent med at ferdigheter og kunnskaper kan utvikles gjennom lesing, øving og anvendelse. Gode prestasjoner er i tillegg et resultat av de holdninger vi møter utfordringene med, og de kan også øves på, men på en annen måte. I denne omgang nøyer vi oss med å slå fast at kunnskaper, ferdigheter og holdninger kan videreutvikles gjennom påvirkning og øvelse.

Kan vi lære noe av de som presterer på høyt nivå? Hvordan tenker og jobber de for å utvikle seg til å prestere best mulig? Om en tar utgangspunkt i en del intervju med utøvere på høyt nivå innenfor individuelle idretter, sier de at for å prestere på et høyt nivå er de avhengige av å være medlem av et godt team, og å ha et godt støtteapparat. Begge disse forholdene kategoriserer jeg som en type støtte- og stimuleringskilde for utøveren. En stimuleres av gode treningspartnere, og av at forholdene er lagt godt til rette og bidrar til å holde fokus på den aktiviteten en anser som nødvendig for å nå sine mål.

Kan vi så forestille oss noe team og støtteapparat i læringsarbeidet? Jeg mener det er mange likheter her, enten det er kollokvier, regneøvinger, prosjektarbeid, laboratoriearbeid, ekskursjoner, forestillinger, utstillinger eller seminarer. Utbyttet fra slike læringsarenaer være avhengig av den faglige og sosiale kompetansen elevene bringer med inn på disse arenaene. Ferdigheten videreutvikles i et samspill med hverandre, og noen ganger i samspill med en veileder.

Støtteapparatet er enda mer åpenbart. Informasjon, lokaliteter, fagopplegg, undervisning, læremidler og utstyr, veiledning, elevvelferd osv. er faktorer som i større og mindre grad påvirker læringsarbeidet vårt. Et annet poeng som jeg har lyst til å hente fram fra idretten, er hvordan de fokuserer for å prestere godt.

> Espen Bredesen sa omtrent som følger da han ble intervjuet i forbindelse med hoppkonkurransene under OL på Lillehammer. Reporteren ville vite hvordan han tenkte da han satt på bommen i overrennet. «Dersom jeg tenker at jeg må hoppe 128 m for å slå Weissflog (hans hardeste konkurrent), kan det hende at jeg lander på 114 m. Dersom jeg er fokusert på arbeidsoppgavene mine, kan det hende jeg lykkes å hoppe 128 m.»

å være fokusert på arbeidsoppgavene betyr at han tenkte på det han hadde trent på og som var forutsetningene for et vellykket skihopp – riktig sittestilling, satsbevegelse, flytestilling og nedslag. Han hadde altså ikke tankene rettet mot resultatet, men mot de tingene som måtte gjøres for å oppnå et godt resultat. Som vi ser – en enorm fokusering på prosessen. Logikken er jo åpenbar. Det gode resultatet er en konsekvens av en god prosess. Det blir derfor meningsløst å diskutere hva som er viktigst – prosess eller resultat – fordi de bygger på hverandre. Graden av resultatoppnåelse kan gi informasjon som kan brukes til å forbedre prosessen.

Hvordan har du opplevd dette perspektivet i din egen skolegang? Har fokuset vært rettet mot riktig svar eller mot å beherske de delferdighetene som ville være en garanti for et godt resultat? Med utgangspunkt i studiemiljøer med mye obligatorisk øvingsarbeid, der målet er å få godkjent et tilstrekkelig antall øvinger, har jeg formulert følgende motto for opplæring av læringsassistenter: «Fra løsning til læring». Det betyr at læringsprosessen settes i fokus fordi den er prestasjonens mor.

1.1.3 Å lære er å oppdage – MOTIVASJON

Motivasjon er et stort og omfattende emne, men det har noen hovedtrekk ved seg som kan være til nytte når vi skal legge til rette for læring. Motivasjon handler om å skape energi, pågangsmot og arbeidslyst; kort sagt inspirasjon. I sammenheng med en undervisningstradisjon der en ofte viser, forklarer eller forteller først og så gir oppgaver, kan det være grunn til å spørre hva det er mulig å overlate til den lærende selv å finne ut. Poenget her er at dersom en finner ut av ting uten lærerens hjelp, vil en oppleve mestring på en helt annen måte enn dersom en bare gjorde som en hadde fått forklart. Mestring er sannsynligvis den viktigste kilden til arbeidslyst og pågangsmot i læring og arbeidsliv.

I enkelte fag burde en lagt mer vekt på en slik oppdagende tilnærming. Mot slutten av undervisningen må det være en sentral måte å jobbe med fagstoff på, ettersom en del av sluttkompetansen skal være at en kan jobbe selvstendig innenfor fagfeltet. Selvstendighet er påvirkelig av impulser utenfra. De reaksjoner og tilbakemeldinger en får på faglig arbeid – individuelt eller i samarbeid med andre – vil være viktig for å bygge opp denne selvstendigheten.

1.1.4 Å LÆRE FORUTSETTER AKTIVITET – ROLLE

I sammenheng med planlagt og systematisk læring innenfor skolesystemet vil en god del av læringsarbeidet skje i et samspill mellom lærer og elev. Vi kan betrakte lærerrollen og elevrollen som komplementære roller, dvs. at de står i et gjensidig avhengighetsforhold. Det betyr i praksis at når læreren er svært aktiv, må elevene spille en mer passiv rolle og motsatt. Den som kan noe fra før blir ofte grepet av en inderlig lyst til å forklare den som ikke kan. Da blir det viktig å erkjenne forklaringens begrensninger og gi rom for det bearbeidingsarbeidet som eleven selv må gjøre for å skape læring.

Oppgaver der elevene selv jobber og får tilbakemeldinger vil være nødvendig for å legge til rette for læring. Det samme gjelder i mer praktisk undervisning. Dersom læreren overtar for elevene på en laboratorieøving slik at eleven bare blir tilskuer, får vi samme effekt. Det blir derfor viktig å være arenabevisst og tenke i hvilke sammenhenger elevens aktivitet skal stå i sentrum, og i hvilke sammenhenger lærerens aktivitet skal stå i sentrum.

1.1.5 OPPSUMMERING

Gjennom en del generelle betraktninger om læring og utdyping av noen påstander om hva læring handler om, har vi sett at læringsaktivitetens kvalitet henger sammen med en rekke forhold som det er mulig å påvirke. Dette forutsetter et samspill mellom lærere og elever, men den som har i oppgave for å legge til rette for best mulig læring, har et spesielt ansvar. En kan påvirke læringsklimaet, fokusere på læringsprosessens betydning for læringsresultatet, bidra til pågangsmot og lærelyst, og stimulere den som skal lære til selv å være aktiv. Psykologiske faktorer som tanker, følelser, selvtillit, holdninger, stress og konsentrasjon vil påvirke våre prestasjoner.

1.2 INDIVIDUELLE FORUTSETNINGER FOR LÆRING

I dette avsnittet skal vi se på en del forhold som har vist seg å ha betydning for at et systematisk og planlagt læringsarbeid skal føre til et godt resultat. Følgende faktorer ser ut til å virke inn på læringsresultatet og må derfor ivaretas ved planlegging og gjennomføring av opplæring:

1.2.1 MÅLFORSTÅELSE

Har eleven en klar oppfatning av hvilke krav som stilles til utførelse, analyse, drøfting, tempo, nivå osv.? Er disse kravene akseptert? Det er en viktig oppgave å utvikle og kommunisere mest mulig informative læringsmål, selv om mål ikke alltid beskriver resultatet på en konkret måte. Ulike fagtradisjoner har ulike stammespråk, men målene må gi mening i betydning av å kunne være en rettesnor for arbeidet til eleven.

1.2.2 Motivasjon

Ser eleven hensikten med det hun holder på med, eller synes hun det er mer eller mindre meningsløst? Selv om man er motivert for et kurs eller en bestemt utdanning, betyr det ikke at man er motivert for alt som blir presentert. Det er derfor viktig å ivareta det daglige motivasjonsbehovet ved å forsøke å gi mening til den aktiviteten som skal foregå.

1.2.3 Oversikt og sammenheng

Dette henger til en viss grad sammen med punktene ovenfor. Det vil være viktig å ha oversikt over den helheten som arbeidsoppgaven kan være en liten del av. For den kompetente (læreren) er det meste både klart og selvfølgelig, men det er viktig å ikke undervurdere behovet for oversikt og sammenheng hos elever som møter fagområdet eller oppgavene for første gang.

1.2.4 Konkretisering

All ny læring må på en eller annen måte knyttes til det vi kan fra før. Det kan vi oppnå ved å konkretisere det nye på en slik måte at elevene kjenner seg igjen fra egne erfaringer, eller ved å bruke hjelpemidler, modeller, demonstrasjoner og illustrasjoner som kan gi et bilde av noe som er ukjent eller virker abstrakt. Poenget er å gå fra det kjente til det ukjente.

1.2.5 Aktivisering

Læring er en aktivitet som foregår hos det mennesket som skal lære. Opplæringen må derfor legges opp slik at vi stimulerer til aktivitet hos elevene. Det kan være i form av at de prøver ut ting, drøfter begreper, sammenligner metoder, innhenter opplysninger, gjør praktiske erfaringer, diskuterer problemstillinger osv.

1.2.6 Individualisering

Mennesker er forskjellige, og det har vist seg at de også lærer på forskjellige måter. Dersom eleven har problemer med å tilegne seg kunnskap og ferdigheter, må vi se nærmere på hvordan vi legger til rette for læring. Noen vil helst lese og tenke, noen må høre og få ting forklart, andre er avhengig av demonstrasjon, og atter andre er nødt til å prøve selv uten veiledning. Dette må læreren finne ut av etter hvert i samarbeid med eleven.

1.2.7 Kommunikasjonsklima

Er det en åpen tone slik at elevene tør å stille spørsmål? En av de viktigste egenskapene en elev kan ha, er mot til å spørre om alle ting han lurer på. Læreren kan imidlertid med sin atferd og sitt reaksjonsmønster i forhold til spørsmål og kommentarer fra elevene, stimulere eller hemme denne egenskapen. å vise interesse for elevenes innspill har en helt annen virkning enn om du avviser dem eller gir knappe svar samtidig som du signaliserer at innspillene bare forstyrrer din plan og dine synspunkter. Dialog er det bærende element i de fleste opplæringssituasjoner

1.2.8 Tilbakemelding

All læring er avhengig av en eller annen form for bekreftelse: rett/galt, bra/dårlig, kreativt/kjedelig, representativt/ensidig osv. Tilbakemeldingen kan være muntlig eller i form av et vellykket resultat, men det er viktig med jevnlig tilbakemelding underveis for å redusere usikkerhet og defensive holdninger til læringsarbeidet. Husk, ros og ris er ferskvare!

1.3 Motivasjon

Motivasjon er et sentralt tema i læring og arbeidsliv forøvrig, fordi motivasjon gir energi, styrer viljen og driver handlinger. Samtidig utgjør motivasjon et svært og sammensatt fagfelt. Mennesket er på mange måter et flokkdyr, og motivasjon, ytelse og utvikling blir ofte best i sosiale sammenhenger som dekker menneskets grunnleggende psykologiske behov for kompetanse, tilhørighet og autonomi. Som vi ser ligger det noe motsetningsfylt i dette og løsningen vil derfor være å finne noe som balanserer for eksempel autonomi og tilhørighet.

1.3.1 ARBEIDSMOTIVASJON

Selv om motivasjonspsykologien er et stort og komplekst fagfelt må vi likevel lete etter en del knagger som vi kan støtte oss til i hverdagen når det gjelder å skape interesse, energi og arbeidslyst. Organisasjonspsykologen Edgar Schein har et begrep som han kaller arbeidsmotivasjon, og som i sin enkelhet og alminnelighet favner sentrale områder som kan være et praktisk utgangspunkt for å tenke motivasjon. Schein opererer med 4 delbegrep som oversatt til norsk utgjør følgende fire ord som jeg har tillatt meg å sette sammen i en rekkefølge som kan være til hjelp for hukommelsen:

M – estring
A – nerkjennelse
M – ening
A – nsvar

Mestring er en viktig drivkraft i all virksomhet, og betyr også mye for utvikling av et positivt selvbilde. «Nothing succeeds as success». Som lærer må du derfor stille deg følgende spørsmål. Hva har jeg gjort for å legge til rette for at elevene skal oppleve mestring i sitt arbeid? Nå vil mange hevde at en del av elevene mangler forutsetninger for å lykkes i en teoretisk skole. Alle innvendinger til tross, det er viktig å ha dette perspektivet med i de valg du gjør under tilretteleggingen.

Anerkjennelse trenger neppe noen lang begrunnelse for sin betydning som energiskapende faktor. Den norske kulturen ser imidlertid ut til å undervurdere denne siden av sosialt samspill. Jeg påstår at lærere kanskje lider av en yrkesskade i så måte, ettersom de først og fremst blir trenet i å finne feil når de skal lære å rette. Det kan føre til overfokusering på det en ikke har fått til, mens mestring i liten grad blir synliggjort. Vi ser også en tendens til å reservere anerkjennelse til det som representerer noe ekstraordinært, men det er viktig at det jevne arbeidet med fagene også får positiv oppmerksomhet. Tilbakemeldinger som skal stimulere indre motivasjon må imidlertid være spesifikke og omhandle ytelse eller kompetanse. Da kan man stimulere personlig følelse av mestring som styrker troen på egne evner og øker forståelsen for hvordan en oppnår resultater.

Mening er den tredje faktoren til Schein. Elevene ønsker å anvende kunnskapen til problemløsning. De ønsker sammenheng mellom teori og praksis, og de vil gjerne ha kobling mellom læring og egen livserfaring. De etterspør ofte relevans, og oppfattet verdi av arbeidet blir viktig for å vedlikeholde motivasjonen. Det å gi opplæringen mening ser derfor ut til å være et sentralt krav til de som driver opplæring.

En forutsetning for å skape meningsfylte sammenhenger, vil være å gjøre seg kjent med i hvilke sammenhenger kunnskapen kan anvendes. Dette vil gjøre seg sterkt gjeldende spesielt i profesjons- og yrkesutdanninger. Følgende eksempel viser at lærere på universitetene kanskje mangler noe av den praksisforankringen som kunne bidratt til å gi lærestoffet mening:

> Jeg observerte en gang matematikkundervisning for byggstudenter som var kommet et godt stykke ut i studiet. Det var tydelig å merke at de avanserte ligningene for å beregne ulike koeffisienter og størrelser, falt tungt å fordøye for studentene. I pausen foreslo jeg derfor for foreleseren at han kanskje skulle gi studentene et par konkrete eksempler på tilfeller der denne matematikken kom til anvendelse. Da så han bare på meg og sa: «Jeg er matematiker og har ingen peiling på byggevirksomhet».

Dette betyr at vi må overlate til studentene å oppdage relevans og mening.

Ansvar er det siste delbegrepet. Ansvar handler blant annet om innflytelse, handlingsrom og en frihet, og deltakerstyring og deltakeraktivitet står høyt i kurs i de rådende læringsteoriene. Følelse av personlig ansvar er viktig for utvikling av selvstendighet og faglig autonomi, men da blir det også viktig å koble konsekvenser til valg av handlinger. Som lærer må du være tydelig på hva som er ditt ansvar og hva som er elevens ansvar. Når en gir ansvar til noen signaliserer en samtidig tillit. Dette tror jeg du klarer. Selv om det er et mål å ha tett oppfølging av elevers læringsarbeid, er det viktig å finne en posisjon som ikke gjør at de føler seg overvåket og som gir dem mulighet for å foreta egne prioriteringer og valg. Det er også viktig å ha øynene åpne for at noen elever vil profitere på stor frihet i opplæringen, men andre har personlighetstrekk som gjør at de er avhengig av tett pedagogisk ledelse i sitt læringsarbeid.

Min erfaring er at disse fire begrepene – hentet fra arbeidsmotivasjon – kan vi samle i MAMA-prinsippet. Begrepene er hensiktsmessige knagger som gir et godt utgangspunkt for å tenke motivasjonstiltak i forhold til elevers læringsarbeid.

1.3.2 Meningsdannelse – et puslespill

Meningsdimensjonen i motivasjonsbegrepet kan også kobles til den opplevelsen elever ofte har i møte med et nytt fag. Faglig kompetanse skal bygges opp bit for bit, og den kompetente (læreren) undervurderer ofte behovet for oversikt og sammenheng, mening og relevans. En kan betrakte det å arbeide med et fag som å legge et puslespill. Det er i prinsippet minst to ulike måter å legge et puslespill på. Du kan kjøpe spill som ligger ferdig lagt og som du kan studere før du tar bitene fra hverandre og forsøker å sette dem sammen til et bilde. Eller du kan kjøpe et spill der bitene ligger hulter til bulter, tømme dem ut på bordet og starte det møysommelige arbeidet med å lage et bilde du ikke kjenner på forhånd.

Overført til læringsarbeid vil det være gunstig for motivasjonen om vi klarer å tegne et oversiktsbilde av faget, som elevene kan ha som referanseramme i sitt arbeid. Alle delene skal til slutt bygges sammen til falig forståelse og kompetanse. Der flere faglærere deler på et fag blir kravet til et oversiktsbilde enda sterkere. Hvem skal tegne dette bildet og spinne på den røde tråden som skaper sammenheng?

1.3.3 To move people to action – å åpne døra

Motivasjon handler om å skape bevegelse, og mange lærere har opp gjennom tiden brukt betydelig energi på å skape en læringsbevegelse, dessverre ofte med dårlig resultat. Kan det skyldes at vi går for rett på sak? Finner vi ikke nøkkelen? Følgende bilde som jeg fikk fra en venn og kollega, kan si noe om de utfordringer du står overfor når du ønsker å dra med elevene i det faglige arbeidet.

Forestill deg at eleven har ei lita dør på brystet hvor kunnskap og informasjon kan tas inn. Den har læreren oppdaget og legger mye energi i å forsøke å presse faget inn. Men det virker som om døra er stengt. Hvordan kan den åpnes? Det nytter ikke å trykke på dørhåndtaket, men læreren dytter så godt han kan. Det han imidlertid ikke har forstått, er at døra er hengslet utover og at nøkkelen står i på innsiden.

Mange har funnet døra, men de har ikke gitt seg tid til å finne ut hvordan den fungerer. Med utoverhengsling og nøkkelen på innsida, blir kanskje motivasjonsoppgaven av en litt annen karakter. Hvordan skal vi få gitt beskjed og skape vilje til å åpne døra? Har du gjort deg interessant nok til å få komme innenfor?

Motivasjonsprofilene våre er mer sammensatt enn som så, og derfor gir disse betraktningene bare en del av bildet. Samtidig valgte jeg å ta dem med fordi mange lærere stiller seg så uforstående til manglende interesse. Det er en del forhold som påvirker motivasjonen, noen av dem har vi allerede vært innom. I tillegg hjelper det å få være aktivt med og oppleve relevans og praktisk nytte, å skape, spille, opptre, bygge. Dersom en i tillegg får noen valgmuligheter, kan motivasjonen stige betraktelig. Plusser vi på med tilhørighet, identitet, behovet for å bli sett og en rekke andre psykologiske behov, ser vi at det finnes mange motivasjonsknapper å trykke på.

1.4 Vi lærer på ulike måter

Det siste momentet om læring i denne omgang, er knyttet til at vi lærer best på litt forskjellige måter. Første ledd i læringsprosessen er knyttet til informasjonsinnhenting eller hvordan en tilegner seg informasjon. Læringspsykologene deler oss inn i følgende tre hovedkategorier, etter hvilken kanal vi foretrekker å ta inn informasjonen gjennom:

1) **de auditive** – deres foretrukne informasjonskanal er gjennom ørene, og de ønsker å lytte, spørre og diskutere. Auditive metoder er forelesning, spørsmål og svar, diskusjoner, lydbånd med mer.

2) **de visuelle** – de tar inn informasjonen best gjennom øynene og foretrekker derfor å se, sammenligne, lese tekst og studere bilder. Visuelle metoder er å skrive på overhead, flippover eller tavle, vise bilder, film, modeller, diagrammer, demonstrasjoner osv.

3) **de kinestetiske** – de lærer først og fremst gjennom å røre ved, prøve selv, og setter gjerne i gang uten å ha lest gjennom manualer eller bruksanvisninger – er det noen som kjenner seg igjen fra møtet med flatpakkede møbler fra IKEA? Aktuelle metoder er øvelser, laboratorieeksperimenter, bygging av egne modeller, praktisk anvendelse av utstyr, dramatisering, simulering, improvisasjoner osv.

Vi tar selvsagt inn informasjon gjennom alle kanaler og eksemplene på metoder viser også at mange er kombinasjoner av for eksempel bilde og tale, men vi har en tendens til å stole mer på en sans enn en annen. Vi har en 'favorittsans' når vi skal tilegne oss informasjon. Det kan være nyttig både for elev og lærer å bli bevisst hvilken kanal som foretrekkes.

> Tenk deg et besøk hos fysioterapeuten. Hvordan vil du fysioterapeuten skal gi deg informasjon? Vil du helst ha en trykksak med illustrasjoner som forklarer øvelsene du skal gjøre hjemme (visuelt)? Foretrekker du at fysioterapeuten skal fortelle deg om øvelsene og forklare dem for deg (auditivt)? Eller ønsker du at fysioterapeuten skal gjøre øvelsene sammen med deg, og lede deg inn i riktige bevegelser til du har forstått hvordan de skal gjøres (kinestetisk)?.

De fleste vil ha en kombinasjon, men noen klarer seg ikke med demonstrasjon og visning. Andre vil legge trykksaken et sted der den aldri blir lest, og atter andre må både prøve og diskutere for å forsikre seg at de har forstått.

Med kunnskap om din egen informasjonsinnhentingsstil kan du styre innlæringen bedre. Det innebærer blant annet å gi lærer eller veileder tilbakemelding på hvordan du foretrekker å få presentert stoff. Matematikk og kjemi er ofte lagt opp visuelt ved at læreren viser og demonstrer. øvelsesoppgavene kommer til slutt, og da har en del falt av for lenge siden. Nok en illustrasjon av hvilke praktiske utslag ulike læringsstiler kan innebære, får du gjennom følgende beskrivelse:

> Dersom du er på en lab og har levert ut en prosedyre for et forsøk som du ber elevene lese gjennom før de starter arbeidet,

> vil du kunne kjenne igjen disse tre kategoriene gjennom følgende atferd. Mens de leser går du kanskje rundt og henvender deg med en hyggelig kommentar: «Er det greit? Er det noe som er vanskelig?» Den visuelle vil da kanskje reagere med å si: «Vær stille. Ikke forstyrr meg.» Den auditive derimot vil etter kort tids lesing henvende seg til sidemannen og si: «Kan vi ikke snakke om dette?» Lesing er en tung måte å ta inn informasjon på. Den kinestetiske setter ganske raskt i gang med å montere utstyr og hente reagenser. Han utfører det praktiske helt til det kanskje stopper opp eller at forsøket mislykkes pga. en feil i oppsettet.

I praksis vil vi selvfølgelig være en blanding av alle disse tre kategoriene. Gjennom enkle håndsopprekninger de siste årene har jeg registrert at en betydelig andel av de menneskene jeg har undervist for på høyskole- og universitetsnivå, kategoriserer seg som visuelle og kinestetiske. De vil se og gjøre. I hvor stor utstrekning er det anledning til dette innenfor de undervisningsformer som er dominerende i dag? Konklusjonen blir at det er lettere å huske det som oppfattes av flere sanser samtidig. Vi må derfor sende på mange kanaler samtidig.

1.5 Veiledning

Kritisk venn

Veiledning i forbindelse med opplæring handler om å stimulere en rekke prosesser. Det grunnleggende perspektivet kan beskrives gjennom begrepet kritisk venn. Det innebærer at du balanserer mellom å utfordre og å gi støtte i møte med den som du skal veilede.

Støtte og utfordring er to funksjoner som kan være vanskelig å kombinere. De fleste har små problemer med den støttende siden av rollen, når de blir minnet om betydningen av den. å oppmuntre, gi anerkjennelse, stimulere til refleksjon og bekrefte, kan alle bli gode til gjennom bevisstgjøring og litt trening. Det å utfordre eller konfrontere faller mye tyngre for mange i en nær og varig relasjon som et veiledningsforhold ofte vil være. Nære relasjoner og konfrontasjoner går ofte dårlig sammen. Nærheten skremmer ved at situasjonen er svært sårbar når det gjelder personkjemi. Ingen ønsker å ha det utrivelig, og unnlater derfor mange ganger å utfordre i den grad de kunne ønsket det. Selv om utfordringene har et faglig siktepunkt, vil mange ta dette personlig. Det betyr at følelser blir aktivert, og det er noe uforutsigbart over slike situasjoner. De fleste fagfolk føler seg komfortable i forhold til faglige utfordringer. Følelsesmessige utfordringer har de imidlertid liten trening i å takle på konstruktive måter. 'å lære er å våge' gir utfordringer både til veileder og student.

Dersom konfrontasjonen skal få en konstruktiv effekt, må den bygge på et fundament av gjensidig tillit. Det betyr at en del av veilederferdighetene er evnen til raskt å bygge tillit. De fleste vil steile og si at tillit er noe som utvikles over lang tid. Både ja og nei. Det spørs hva slags tillit vi snakker om, og jeg vil noe nølende foreslå profesjonell tillit samtidig som jeg håper at det ikke gir assosiasjoner i retning av en upersonlig relasjon.

1.5.1 Stimulere elevens læringsaktivitet

En annen måte å betrakte veiledning på, er å si at det er en undervisningsform der hovedfokus er flyttet fra lærer til elev. Det betyr at du må ta utgangspunkt i elevens handlinger og den forståelsen han gir uttrykk for. Veiledning er en måte å støtte eleven på i læringsarbeidet. Ved veiledning kan du styrke læringseffekten gjennom å påvirke en rekke forhold som øker kvaliteten på elevens læringsarbeid. Det handler blant annet om å:

- bidra til målrettet arbeid
- øke elevens selvinnsikt
- gi støtte til elevens idèer
- peke på muligheter
- bidra til avgrensninger
- stimulere til refleksjon
- etterlyse begrunnelser
- oppmuntre til planlegging
- stille spørsmålstegn ved grunnlaget som vurderinger og valg bygger på

Som vi ser, er det en rekke funksjoner som kan bli satt i gang eller vedlikeholdt av en veileder. Mange har erfart at en av de største utfordringene ved veiledning, er å la være å overkjøre med egne råd eller overta når eleven strever. I den forbindelse vil jeg igjen understreke en sentral egenskap ved den gode veileder: å ha stor toleranse for det uferdige.

1.5.2 Forskjellen på veiledning og instruksjon

Pedagogisk veiledning er det arbeidet veilederen utfører for å legge til rette og støtte eleven i læringsarbeidet. Noen lurer kanskje på hva slags forskjell det er på veiledning og instruksjon. Vi skal her prøve å gi et lite bilde som kan synliggjøre forskjellen.

Instruksjon kan sammenlignes med å gå foran og gi beskjeder og peke ut veien for eleven. Det betyr at instruksjon er styrt av læreren. Veiledning kan sammenlignes med å gå ved siden av eller litt bak og la eleven finne veien selv. Veilederen kommer med innspill som gjør at eleven ikke skal tulle seg bort, skjerper oppmerksomheten mot vesentlige faktorer, og fungerer som en utstrakt hånd for å hjelpe eleven opp fra eventuelle 'grøfter'. Det betyr at veiledning er styrt av elevens behov og aktivitet.

I det daglige arbeidet med elever vil lærere ofte veksle mellom formidling, instruksjon og veiledning. Når arbeidsoppgavene er ukjente, går det ofte i retning av instruksjon, men når de grunnleggende ferdighetene og kunnskapene er tilegnet, blir veiledning mer dominerende.

For eksempel kan en tenke seg at et kurs om en eller annen programvare starter med en formidlingsdel, der det blir redegjort for oppbygging, anvendelsesmuligheter og en del om bruk og bruksområder. Deretter kan det gå over i en instruksjonsdel, der elevene gjennom eksempler får demonstrert hvordan programvaren virker. Til slutt skal deltakerne selv gjøre seg kjent med programvaren gjennom å øve seg på maskinene. I denne fasen vil det være behov for hjelp og støtte fra den faglig ansvarlige, og denne støtten kan ha karakter av veiledning.

1.5.3 Instruksjon og veiledning hånd i hånd

I forrige avsnittet prøvde vi å illustrere forskjellen på instruksjon og veiledning. Vi sa at instruksjon var å gi beskjeder og gå foran og vise vei, mens veiledning var å gå på siden eller like bak og la eleven finne veien selv i størst mulig utstrekning. Gjennom observasjon kunne en finne ut når det var grunnlag for å komme med innspill som holdt deltakeren noenlunde på riktig kurs.

I det virkelige liv vil instruksjon og veiledning gå over i hverandre. Når nye arbeidsoperasjoner og ferdigheter skal øves, blir innslaget av instruksjon stort. Når eleven er blitt mer selvstendig og skal lære å foreta en selvstendig planlegging og vurdering av eget arbeid, vil veiledning være dominerende. Både instruksjon og veiledning har imidlertid som hensikt å legge til rette for og styrke gode læringsprosesser. Vi vil derfor minne om noen viktige individuelle forutsetninger for læring som ble presentert i første del, og som det kan være hensiktsmessig å repetere før vi går inn på viktige sider ved instruksjon.

1.5.4 Noen viktige sider ved god instruksjon og forklaring

Instruksjon brukes vanligvis når eleven står overfor nye og ukjente oppgaver. Følgende prinsipper kan være hensiktsmessig for å strukturere instruksjonen og utvikle progresjon i læringen:

Oppdeling
Nye arbeidsoperasjoner bør ofte splittes opp i mindre deler som kan øves hver for seg og så bli satt sammen til en helhet. Det vil ofte være hensiktsmessig for forståelse og motivasjon å vise helheten først og dele opp etterpå.

Tempo
For den kompetente veileder er det ofte vanskelig å sette seg inn i elevens ståsted. Det vi kan fra før, er så enkelt. Det blir derfor viktig å instruere i et slikt tempo at eleven har mulighet for å få med seg alle detaljer. Det forutsetter at veilederen har oppmerksomheten sin fordelt mellom den faglige oppgaven og elevens reaksjoner og at instruksjon ikke bør foregå under tidspress.

Toveiskommunikasjon
Uansett hvor klart veilederen uttrykker seg, vil eleven oppfatte ting på sin måte. Den beste måten å forebygge misforståelser på, er å be eleven gjenta forklaringene med sine egne ord, og å stille spørsmål til eleven underveis. Måten dette blir gjort på, er imidlertid avgjørende. Vi må sørge for at det ikke får karakter av et forhør eller at det blir oppfattet som en utidig kontroll. Perspektivet må hele tiden være at det skal være avklaringer som skal støtte eleven i hennes læringsarbeid. Som veileder må en også være påpasselig slik at ikke lærer-autoriteten fungerer som en hindring for elevens kreativitet og engasjement.

Forsvarlig forenkling
I en del sammenhenger må vi forenkle både det vi viser og det vi sier. Av og til kan slike forenklinger ende opp i en slags vranglære. Når vi samtidig vet at det er svært vanskelig å avlære noe som er lært, bør vi være omhyggelig og tenke grundig igjennom våre forenklinger slik at de ikke fører til misforståelser. Bruk av forenklinger forutsetter at veilederen har klart for seg hva slags budskap han/hun vil ha fram. Det blir viktig å være bevisst på begrepsbruk, visualisering i form av bilder og skisser, valg av eksempler og i hvilken grad det er mulig å generalisere fra en situasjon til en annen. Samtidig vil erfaring gi veilederen oversikt over hvilke forhold som vanligvis kan bli misforstått.

Progresjon
Dette henger sammen med punktet ovenfor, men det har også å gjøre med en økning av kravene både over tid og innenfor en instruksjonsenhet. Når veilederen oppdager at eleven forstår og behersker det som er nødvendig, er det viktig å gå videre. Overforklaring virker sløvende. Samtidig må en være på vakt mot overlessing. Det er begrenset hvor mye nytt stoff eleven kan ta imot på en gang.

Målforståelse
Selv om det sjelden er en direkte sammenheng mellom mål og middel, vil det være mer eller mindre samsvar. God instruksjon bærer preg av at veilederen velger metoder som står i forhold til det han ønsker å oppnå. Dersom målet er at eleven skal beherske en eller annen form for ferdighet, er det viktig at han får anledning til å prøve selv — under tilstrekkelig overvåkning av veilederen. Ordet tilstrekkelig brukes med overlegg fordi overvåking er lite inspirerende i

en utprøvingsfase, og en må her tenke i retning av et konstruktivt samarbeid der du representerer støtte og gir trygghet til å prøve seg.

Praktisk tilrettelegging
Under dette punktet hører det hjemme en gjennomtenkning av forholdene rundt selve instruksjonen. Det kan være avskjerming og mulighet for konsentrasjon, det kan være sammenheng og nærhet til det arbeidet eleven holder på med, det kan være tidspunkt på dagen. Det vil sjelden være effektivt å ta for seg nye ting på slutten av en dag når eleven er sliten.

1.5.5 VEILEDNING I GRUPPER

En måte å effektivisere veiledningsarbeid på er å samle deltakerne i mindre grupper når veiledningen skal foregå. Dette skjer fortrinnsvis når du oppdager at mange elever sliter med de samme problemene. Da kan veilederen legge opp en veiledning som er tematisert og der gruppen er målet for veiledningen. Ved veiledning i grupper kan en få ekstra utfordringer dersom gruppens medlemmer er svært forskjellige når det gjelder å være innadvendt eller utadvendt. Det er all grunn til å være på vakt mot at enkelte gruppemedlemmer stikker av med hele veiledningseffekten.

Fordeler med gruppeveiledning kan sammenfattes i følgende punkter:

- Det er arbeidssparende fordi en kan ta opp felles tema som gjelder alle i gruppen
- Dette frigjør tid til individuell veiledning
- Grupper skaper et forum som gjør det lettere å bearbeide og normalisere følelser som et tett 'en-til-en'-forhold vanskeliggjør
- Det er lettere for elever å gi uttrykk for kritikk og uenighet i en gruppe
- Det blir ofte lettere stemning i en gruppe, og den stiller mindre krav til den enkeltes samtaleferdighet
- Gruppen kan brukes til forpliktende framleggelse og bruk av medelever i feedback

Ved veiledning i grupper er det naturlig å gå mer i retning av en systemteoretisk innfallsvinkel på veiledning. Der rettes fokus i sterkere grad mot relasjoner mellom mennesker, og virkninger av handling. Kompetansen skal realiseres i samspill mellom mennesker, og da ligger en vesentlig del av utviklingsmulighetene i relasjonsforståelse. Som veileder for en gruppe må du ha fokus på samhandlingen og se hva som hemmer og fremmer gruppens arbeidsklima. Den sunne gruppen er en god blanding av struktur, kreativitet, samhold og motsetninger, og veileders oppgave blir i en del sammenhenger å stimulere de funksjonene som får minst oppmerksomhet av gruppemedlemmene. Veilederens spørrende atferd kan stimulere både samspillsfunksjoner og oppgavefunksjoner. Jeg velger her å fokusere på en del funksjoner som kan styrke det faglige utbyttet av gruppens arbeid. Gjennom innspill og spørsmål kan veileder:

- bidra til oppsummering og statusforståelse
- skape konfrontasjoner
- kreve begrunnelser
- stimulere til refleksjon
- støtte og oppmuntre planlegging
- kaste fram idèer
- bevisstgjøre gruppens samhandling
- bidra med erfaringer
- etterlyse handlingsplan og skape framdrift
- bidra til avgrensninger og realistiske planer
- orientere om litteratur og andre kunnskapskilder

Alle disse elementene er bidrag som i visse faser av en gruppes arbeid vil bidra til å øke kvaliteten på den faglige diskusjonen, gi arbeidet retning og stimulere den faglige progresjonen.

1.5.6 Faglig veiledning — faser

Faglig veiledning kan deles inn i noen faser for å synliggjøre hvordan en setter veiledningsprinsippene om til praktisk virkelighet. Jeg har valgt en femdeling, men må straks understreke at de ulike fasene vil ha forskjellig betydning avhengig av situasjon, oppgave og person. Likevel angir de en prinsipiell måte å tenke hvordan et forløp i en faglig veiledning bør være.

1) **Kartlegging** av elevens forutsetninger, forståelse og foreløpige forslag knyttet til den faglige utfordringen.

Behovet for kartlegging vil selvsagt variere, men i prinsippet er det alltid nødvendig med en viss statusforståelse før en går videre. En må ikke falle for fristelsen til å gi svar på en rekke spørsmål som ikke er stilt, eller 'sprenge åpne dører' gjennom å bruke tid på ting som allerede var forstått.

2) **Utfordring** av elevens forståelse ved å etterlyse begrunnelser/alternativer, oppmuntre til resonnementer og stimulere til refleksjon.

Når utgangspunktet er klargjort, vil neste utfordring være å se om eleven er i stand til å komme videre gjennom at veilederen presenterer henne for noen utfordringer som kan gi nye idèer, peke på muligheter og alternativer, utfordre begrunnelser osv. Dersom du hopper over de to første fasene, går du fra å drive veiledning til å drive rådgiving.

3) Innspill i form av eksempler, erfaringer og teoretiske rammer.

Det meste av veiledningslitteraturen advarer mot rådgiving, og jeg har derfor kalt fase 3 for innspill. Det blir en indirekte form for rådgiving der en bruker sin egen kompetanse til å gi eksempler, komme med egne og andres erfaringer, spille inn nye teoretiske perspektiver osv. Alle disse tre fasene har som hensikt å klarlegge elevens ståsted og potensiale gjennom å se om vedkommende er i stand til å komme videre på grunnlag av utfordringer og innspill.

4) Beslutning om strategi for oppgave-/problemløsning.

Etter de tre første fasene vil eleven ofte spørre: Hva gjør jeg nå? Da skal veilederen motstå fristelsen for å komme med detaljerte anbefalinger. Det er minst to gode grunner for å unngå det. For det første skal eleven trenes i å resonnere og lære seg å stole på egne faglige vurderinger. For det andre vil mestringsopplevelsen bli langt større dersom eleven 'finner veien' selv i stedet for å følge den veien veilederen eventuelt tegner opp. Tidligere pekte vi på at mestring kanskje var den viktigste enkeltfaktoren i forbindelse med arbeidsmotivasjon. En kjapp anbefaling fra veilederen sin side kan bidra til å frata eleven en slik mestringsopplevelse.

5) Respons på elevens løsningsforslag.

Samtidig er det viktig å gi respons på elevens forslag. Det kan være positiv respons som gir støtte og dermed energi og styrket selvtillit. Noen ganger kan det være nødvendig å oppfordre til å tenke alternativt eller spille inn nye momenter slik at eleven holder seg sånn noenlunde på skinnene. Det heter riktignok at vi lærer av våre feil, men alle behøver ikke streve like mye med ting som gir marginalt læringsutbytte. Det er derfor viktig å vurdere om du slipper eleven ut på for dypt vann før hun er svømmedyktig.

Moralen i disse punktene er at veilederen hele tiden skal anstrenge seg for å la eleven være den aktive og beholde initiativet. Veiledningen skal være en støttefunksjon til elevens arbeid. Hensikten er å stimulere til forståelse, utvikle selvstendighet og synliggjøre mestring.

1.6 VEILEDNING OG VURDERING

Veiledning og vurdering er i mange sammenhenger to sider av samme sak. Uansett observasjonsmetode, gjennomlesing eller samtale, vil veilederens spørsmål, utfordringer og innspill ha sitt utgangspunkt i en eller annen vurdering knyttet til fag, situasjon, progresjon eller person. De siste års skolereformer og kvalitetsreformen i høyere utdanning peker også på veiledningens vurderende funksjon. Det er imidlertid ingen sluttvurdering, men en underveisvurdering som skal gi innspill til studentens videre læringsprosess. Vurderingen blir ufullstendig dersom den bare knyttes til vurdering av sluttresultatet. Kvalitet er et resultat av gode valg underveis. Hva med problemstillingen, disposisjonen, valg av metode, materialforbruk, sikkerhet, samarbeid, bruk av utstyr osv.? I prinsippet kan vi si at alle faser av et læringsarbeid bør vurderes fortløpende for å gi grunnlag for justeringer, øke forståelsen og styrke den eksemplariske læringen. Det siste vil si å generalisere erfaringer fra denne spesielle oppgaven som det vil være nyttig å ta med til fremtidig jobbing med læringsoppgaver.

En helhetlig læringsprosess omfatter planlegging, gjennomføring og vurdering. Konstruktiv vurdering underveis bidrar til å forsterke læringsprosessen. Det blir derfor viktig å vurdere arbeidet jevnlig balansert opp mot at en ikke må holde eleven i hånden hele tiden. Denne underveisvurderingen har status som uformell vurdering. Selv om den er uformell, er det viktig å systematisere den slik at vurdering blir en naturlig del av all instruksjon, både veiledning og undervisning. Vurderingen må også ha en bevisst progresjon slik at det blir balanse mellom elevens forutsetninger og de krav som vurderingen representerer.

Veiledning er preget av dialog i langt større grad enn andre former for undervisning. Samtidig vil veiledningssituasjoner være preget av større nærhet mellom lærer og elev enn andre undervisningsformer. Denne nærheten gjør at vi kan vegre oss for å være direkte nok fordi vi er redde for å såre, irritere eller provosere. Dette kan til en viss grad unngås ved å være tydelig på vurderingskriterier og vurderingens hensikt. All vurdering må knyttes opp mot et sett av mål og intensjoner. Disse målene danner utgangspunkt for å fastsette kriterier for galt og rett, godt og dårlig, tilfredsstillende, forsvarlig osv. Erfaring tilsier at vi kan bli bedre både til å utvikle kriterier og til å kommunisere dem på en måte som gjør at de både blir forstått og akseptert. Dersom kriteriene er kjent i utgangspunktet, og vurdering og veiledning tar utgangspunkt i disse, er det mye enklere å ha et saksfokus i veiledningen. Dette skaper ryddighet og forebygger unødvendige konfrontasjoner av emosjonell karakter.

Vurdering er på samme måte som planlegging ikke noe som skal være forbeholdt læreren alene. Ved å stimulere eleven til egenvurdering av sitt arbeid vil vi etter hvert bidra til selvstendighet, faglig bevissthet og utvikling av en faglig identitet. Samtidig vil elevens vurdering også omfatte noen av rammebetingelsene for arbeidet.

1.6.1 Oppsummering – veiledning er støtte, bygger på tillit og krever mot

Veiledning handler om ferdigheter, roller, perspektiver, individer, grupper, kontrakt, kontakt osv. Mange går inn i en slik rolle med et stort prestasjonsbehov. Da er det viktig å huske på at det er den andre som er i fokus, og at ditt blotte nærvær kan være en stor hjelp. Ved å lytte til noen kan vi skape innsikt og forståelse. En romanfigur i Lethinen av Tor åge Bringsvær,1999, sier dette på en elegant måte: «Jeg er en person som ikke vet hva jeg mener før jeg har sagt det».

Veiledning er å utøve en støttefunksjon i forhold til elevens læringsarbeid. Det kan være følelsesmessig støtte i form av interesse, oppmerksomhet og omsorg, eller i hjelp til avklaring og systematisering av utfordringer og problemer. Det kan være informasjonsstøtte som sørger for at eleven til enhver tid har tilstrekkelig informasjon i forhold til det arbeidet som skal gjøres, og det kan være praktisk støtte i form av innspill, råd, hjelp, etablering av kontakt osv. Kunsten ligger i å regulere støtten på en måte som gjør eleven mest mulig selvgående i forhold til de målsettinger utdanningen har.

Veilederrollen er krevende og givende på samme tid. Utfordringene er knyttet til den nære relasjonen som dette foregår i og som innebærer at:

- du arbeider i og med mellommenneskelige forhold som er sårbare.
- du må være autentisk og ekte.
- du må tåle tvetydighet og usikkerhet, og kunne bearbeide den.
- du må tåle konflikt mellom ideal og virkelighet.
- du må kunne observere både faglige og emosjonelle sider av samspillet.
- vårt ønske om å bli akseptert kan føre til unnvikelse i forhold til ømtålige spørsmål

'Læring handler om å våge'. Påstanden ser ut til å forfølge oss. Det krever mot å prøve ut nye tanker og atferd, mot å prøve ting for første gang, mot å feile, mot å satse, mot å være ærlig og ikke minst mot til å være nær i krevende situasjoner. Læring er krevende.

Kapittel 2

Hvorfor lære matematikk?

«Hvorfor trenger jeg egentlig å lære dette?»

Dette spørsmålet har blitt stilt utallige ganger opp gjennom historien. Selv for oss mattekyndige personer, kan det være vanskelig å komme opp med gode svar på stående fot. Det er derfor viktig å reflektere litt over dette.

2.1 Representasjon

Grunnen til at matematikk eksisterer er for at vi skal ha muligheten til å kunne representere alt rundt oss. Matematikk er rett og slett et uvurderlig verktøy for å beskrive verden. Fra gammelt av har vi tatt i bruk lyder og kroppspråk til å kommunisere. Dette har utviklet seg videre til alle ordene vi har i dag for å beskrive ting. Men ord er ikke nok, vi er nødt til å ha et større vokabular. Eller et språk til om du vil. Dette er matematikkens rolle.

Alle bruker matematikk daglig, i mindre eller større grad. Når vi skal betale for varer. Når vi skal beskrive hvor lang tid noe vil ta. Når du skal forklare hvor langt eller stort noe er. Det er derfor viktig at vi lærer både regning og en del grunnlegende matematiske begreper innen matematikk. Det vil gjøre det lettere å beskrive litt mer komplekse situasjoner, størrelser osv. Vi må lære oss å utnytte denne kunnskapen til vår fordel.

2.2 Når har vi nytte av matematikk?

Selv om du ikke skal drive med matematikk, eller andre realfag, i ditt fremtidige yrke, er det allikevel veldig nyttig å ha kjennskap til det. En del eksempler på praktiske yrker som krever matematikk er nevnt i første kolonne under. Desse yrkene er alle helt avhengige av å ha gode kjennskaper til geometri, lengder, mengder, økonomi osv. Dersom vi også ser litt nærmere på mulige realfag- og ingeniørutdanninger, så er det mange muligheter blandt yrkene nevnt i den andre kolonnen.

- Snekker
- Rørlegger
- Elektriker
- Arkitekt
- Bonde
- Regnskapsfører
- Butikkmedarbeider
- Lærer
- Baker
- Biolog
- Bygningsingeniør
- Datatekniker
- Fysiker
- Geolog
- Kjemiker
- Mariningeniør
- Elektroingeniør
- Petroleumsingeniør

Til sammen utgjør dette de fleste yrker i vårt samfunn. Matematikk er nyttig over alt. Det er også vesentlig for å ha innsikt i de andre yrkene, selv om en jobber med noe annet selv.

Kapittel 3

Løsningsstrategi

I dagliglivet møter vi ofte på problemer vi må løse, og i matematikken møter vi på dem hele tiden. Det er derfor veldig nyttig å tenke litt over hvordan vi skal angripe problemene, både for å klare å løse dem, men også for å lære av og forstå dem. Alt er mer interessant når vi behersker og mestrer noe, og vi har derfor valgt å ta for oss en firepunkts-modell som kan være til hjelp når vi skal ta fatt på både enkle og sammensatte problemstillinger. Modellen tar for seg fire faser av prolemløsning, og legger vekt på spørsmål vi kan stille oss selv for å komme i mål.

3.1 Forstå problemet

Det viktigste er å forstå problemet. Hva er det egentlig du skal finne ut av? Forstår du alle ordene i oppgaven? Hvilken informasjon har du tilgjengelig? Den beste måten å sjekke dette på er om du klarer å beskrive problemet med dine egne ord. Klarer du dette så er du allerede på god vei mot en løsning.

3.2 Lag en plan

Neste steg er å bestemme seg for en måte å løse problemet. I de fleste tilfeller har du kunnskapen du trenger for å gjør dette, så det er naturlig å se på oppgaver du har løst tidligere. Kanskje har du løst deler av problemet? Eller noe lignende? Klarer du å lage en skisse av problemet? En av de store styrkene til menneskehjernen er å visualisere og gjenkjenne mønstre. Vi bør derfor bruke desse egenskapene for alt de er verdt. Klarer du å eliminiere den informasjonen som ikke er relevant? Kan du løse en enklere versjon, eller et spesialtilfelle? Klarer du å tippe hvordan løsningen må være? Bestem deg for en måte å løse problemet, ikke ver redd for å gjøre feil. Etterhvert blir du flinkere til å velge de beste fremgangsmåtene.

3.3 Gjennomfør planen

Når du har bestemt deg for en måte å prøve å løse problemet, må du prøve å gjennomføre den. Ikke gi opp med en gang. Det er godt mulig du har valgt en god løsningsstrategi, selv om det ikke gir resultater umiddelbart. Sjekk hvert steg du har tatt, er det korrekt? Dersom du ikke klarer å finne løsningen du er ute etter, klarte du å innhente informasjon om problemet som kan hjelpe deg videre allikevel? Om det ikke gikk, så gå tilbake og finn en ny måte å løse problemet på. Det skal sjelden mange forsøk til før du klarer det.

3.4 Resoner over resultatet

Til slutt er det viktig å sjekke resultatet. Dette er det mange som ikke gjør. Har du svart på alt det ble spurt om? Er svaret logisk? Hvorfor er det korrekt? Dette er viktig å tenke over, ikke bare for å forstå dette problemet fullt ut, men også for å være bedre rustet for vanskeligere problemstillinger som en møter på senere.

Kapittel 4

Tall og triks

Dette kapitlet tar for seg ulike finurlige fenomen, som kan inspirere og være en kontrast til den noe monotone regningen eleven ellers møter. Det kan være alt fra tankevekkere til konkrete 'triks' som en kan vise frem. Det gjennomgående temaet her er å la de ta i bruk sin kreativitet og oppfinnsomhet.

4.1 Gjett tallet?

Et gamemelt indianertriks er å bruke følgende fire ark:

1	3	5	7
9	11	13	15

2	3	6	7
10	11	14	15

4	5	6	7
12	13	14	5

8	9	10	11
12	13	14	15

Trikset går ut på å be en eleven å tenke på ett av tallene i rutene. Det er viktig at tallet holdes hemmelig. Pek på ett og ett ark og be eleven si ja, dersom det hemmelige tallet er på arket. Summer tallene øverst til venstre på hvert ark som fikk ja. Summen er det hemmelige tallet.

Hvorfor? Trikset er basert på totallssystemet, ja og nei er analogt til 1 og 0. Merk at alle tallene øverst til venstre på hvert ark er potenser av to (basetall). Ettersom det er fire ark så vil alle tall opp til og med 15 kunne skrives unikt som en sum av basetallene 2^0,2^1,2^2,2^3. På bineærform blir dette

$$\begin{aligned}
1_{10} &= 0001_2 \\
2_{10} &= 0010_2 \\
4_{10} &= 0100_2 \\
8_{10} &= 1000_2.
\end{aligned}$$

Tallene på arkene kan fritt stokkes om så lenge du husker hvilket ark som inneholder hvilket av basetallene.

4.2 Lyspærer

Vi kan illustrere noen finurlige egenskaper med heltall ved hjelp av lyspærer og lysbrytere. Se for deg at du har fem lyspærer på rekke som er numerert fra en til fem, der alle er avslått. Lyspæren kan enten være av eller på. Oppgaven er så:

- 1. Bytt tilstand på alle som har nummer som er delelig med en, dvs alle blir slått på.
- 2. Bytt så tilstand på alle som har nummer som er delelig med to, dvs nr. to og fire.
- 3. Bytt tilstand på alle som er delelig med tre. Fortsett opp til fem.
- 4. Hvilke lyspærer er det som lyser etter fem runder?

Dersom oppgaven er løst korrekt, så vil svaret være at lyspære nr. en og fire lyser. Så er spørsmålet videre, dersom du har 100 lyspærer og du kjører 100 runder, hvilke lyspærer vil da lyse etter alle rundene?

Svar Til slutt er det lyspærene med nummer 1,4,9,16,25,36,49,64,81 og 100 som vil lyse. Det er altfor mye arbeid å finne dette ut ved å kjøre gjennom alle rundene, så for å klare oppgaven må de se systemet med at svaret er alle kvadrattall mellom en og 100.

Hvorfor? Her må vi tenke oss litt om. Hva er det som skal til for at en lyspære skal lyse til slutt? Jo, den må ha skiftet tilstand et odde anntall ganger. Hva er grunnen til at de skifter tilstand? Jo, de er delelig med det anntall runder som en har kommet til. Hva betyr dette?

Dette betyr at alle kvadrattall har et odde anntall divisorer. Faktisk vil det vise seg at kun kvadrattall har odde anntall divisorer. Alle andre tall har et partall anntall divisorer. Dette vil si at for hver divisor, så vil det alltid være en annen ulik divisor også, som summerer til ett partall med divisorer. Derimot for kvadrattall, så blir divisoren lik seg selv, og divisoren telles altså bare en gang.

Dette gjelder da for alle kvadrattall av vilkårlig størrelse, uavhengig av anntall divisorer. Ekstra spennende er det å se hvor mange divisorer et kvadrattall har. Selv om vi vet at det er ett odde anntall, så kan det variere veldig. Det er ganske enkelt å se at alle kvadrat av primtall, vil ha bare tre divisorer. Utenom dette så er det ikke noe tellbart system.

4.3 NIER-TESTEN

En enkel måte å sjekke om ett tall er mulig å dele på 3 eller 9 er å sjekke om tverrsummen kan deles på 3 eller 9. Dersom det er tilfellet, så er det mulig.

Hvorfor? Her må vi introdusere moduloregning. Det vil si at vi kun ser på resten ved divisjon. Eksempelvis så er $13 = 1 \mod 4$, fordi $13 = 3 \cdot 4 + 1$. Det blir litt som å si at dersom klokka er 10, også går det 6 timer, så er klokka 4. Dette er da fordi $10 + 6 = 16 = 4 \mod 12$. Da kan vi se tilbake på testen igjen.

Vi har at $10 = 1 \mod 9$ og da selvfølgelig også $10 = 1 \mod 3$, ettersom 9 kan deles på 3. Som vi lærer på ungdomsskolen så kan alle tall i titallssystemet skrives på normalform som potenser av 10. For eksempel $128 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$. Modulo 9 vil dette bli $1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^1 + 8 \cdot 1^0 = 1 + 2 + 8 = 11$. Ettersom 11 ikke er delelig med 3 eller 9, så er dermed ikke 128 det heller.

4.4 PENGEDØREN

Du er kommet til enden av en vei, og der er det to dører. Fremfor hver dør står det en mann. Han ene prater alltid sant, han andre prater alltid usant. Du vet ikke hvem som prater sant eller usant, men mennene vet det selv. Bak den ene døra er det en million kroner, bak den andre er det ingenting. Du får lov til å spørre nøyaktig en av mennene nøyaktig ett spørsmål. Hvordan kan du få vite bak hvilken dør det er en million kroner?

Svar Du spør: «Bak hvilken dør vil han andre si at det er en million kroner?». Velg motsatt dør.

Hvorfor? Da vil han som alltid svarer sant vite at han andre vil lyve, og dermed si hvilken dør pengene ikke er bak. Han som alltid lyver vil vite at han andre sier hvilken dør pengene er bak, og fordi han lyver så vil han også si hvilken dør pengene ikke er bak. Du må altså velge motsatt dør av det svaret du får, uansett hvem du stiller dette spørsmålet.

4.5 BRENNENDE TAU

Du har to tau, og dersom du tenner fyr på tauene så brenner de i nøyaktig 1 minutt hver. Derimot brenner de ikke gjevnt, så etter 30 sekund så trenger de ikke være midt på. Hvordan kan du måle 1 minutt og 30 sekund? Hvordan kan du måle 45 sekund?

Svar Du tenner på det ene tauet. Når det er ferdig å brenne så tenner du på det andre tauet i begge ender. Da får du ett minutt pluss 30 sekund.

Svar Du tenner på det ene tauet i ene enden og det andre tauet i begge ender. Dette gjøres samtidig. Når det tauet som brenner i begge ender er brunnet opp, så tenner du på den andre enden på det tauet som fremdeles brenner. Då har du først 30 sekund pluss 15 sekund.

4.6 HATTELEKEN

Ti personer står i kø, og alle har på seg en hatt. Hver hatt er enten grønn eller lilla, men ingen vet hvilken farge de har på sin egen hatt. Når de står i køen så kan de se hvilken farge det er på hattene framfor seg, men ikke sin egen, og ikke bak seg. De ti personene kan vinne en million kroner hver, dersom ni av de ti personene klarer å tippe korrekt farge på sin egen hatt. Først blir bakerste mann spurt om fargen på sin hatt, også går det fremover. Alle de andre kan høre hva de andre sier når de tipper. De har kun lov til å si «grønn» eller «lilla». Alle former for juks fører til at ingen vinner. De får lov til å legge en taktikk på forhånd. Hvordan kan vi garrantere at alle vil få en million kroner?

Svar Han som står bakerst ser fargene på alle hattene fremfor seg. Han bryr seg ikke om sin egen hatt. Dersom han ser et odde antall lilla hatter fremfor seg så sier han «lilla». Dersom ikke, så sier han «grønn». Da er det nestemann sin tur. Dersom han ser odde anntall lilla hatter frefor seg, og personen bak sa «lilla», så vet han at han er grønn selv. Og motsatt. Slik går det hele veien, og alle vil kunne vinne en million kroner.

Kapittel 5

Tall og algebra

Det mest grunnleggende i matematikken er det som kalles *aritmetikk*. Dette er den delen av matematikken som omhandler elementære operasjoner som addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Aritmetikken danner en basis for alt av matematikk, og er dermed den aller viktigste delen å beherske. Aritmetikken går glidende over i algebra, som er en annen, men svært beslektet del av matematikken. Algebra er en matematisk disiplin der man utfører aritmetiske operasjoner på generelle størrelser. Med andre ord vil dette si at man bytter ut tall med abstrakte størrelser som x og y. For mange elever er det denne delen av matematikken som byr på størst utfordring, og det er kanskje her det er aller viktigst å være tydelig og målrettet i sin læring.

5.1 Læreplanmål

5.1.1 8. Klasse

- De fire regneartene ($+ \ - \ \cdot \div$)
- Regne og bytte mellom
  - heltall
  - desimaltall
  - brøk
  - uekte tall
  - prosent og promille
- Hoderegning og Overslagsregning
- Partall, Oddetall og Primtall
- Faktorisering
- Klokkearitmetikk
- Brøkregning
  - forkorte og utvide
  - fellesnevner
  - addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon
- Bruke - ved hjelp av algebra - bokstaver og parenteser i enkle regneuttrykk og formler
- Løse ligninger og ulikheter ved å kombinere regler for de fire regneartene
- Sette prøve på svaret

5.1.2 9. Klasse

- Enkel potensregning og kvadratrøtter
- Studere tallmønstre og følger.
- Skrive tall på normalform

5.1.3 10. Klasse

- Potensregning
- Multiplisere parentesuttrykk
- Kombinere brøk med tall og bokstavuttrykk.
- Løse enkle ligninger med brøk
- Løse annengradsligninger

5.2 Tallære

I ungdomsskolepensum defineres flere forskjellige typer og klasser av tall. Felles for disse er at de er å finne på den reelle tallinjen. Her følger et sammendrag av de talltypene som omfattes.

5.2.1 Heltall

Heltall er definert som alle tall langs den reelle tallinjen som følger ordenen $(..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...)$. Disse tallene kan eksemplifiseres ved å telle alle elevene på en skole, antall fingre på en hånd, etc. Vi liker helst å dele heltallene inn i ulike kategorier. En måte er å dele de inn i sammensatte tall og primtall.

$$\text{Primtallene er de positive heltallene som kun er}$$
$$\text{delelig på to ulike heltall, nemlig } 1 \text{ og seg selv}.$$

Alle tall som ikke er primtall er sammensatte tall[1].

En annen måte er å dele heltallene inn i positive tall og negative tall. De positive tallene er til høyre for null på tallinjen mens de negative tallene er til venstre for null på tallinjen[2].

Tredje måte er å dele inn i partall og oddetall. Partall er alle tall som er delelige på 2, mens alle tall som ikke er delelelig på 2 kalles odde[3].

[1] Merk at 1 er det eneste tallet som hverken er sammensatt eller primtall.

[2] Merk at 0 er det eneste tallet som hverken er positivt eller negativt.

[3] Merk at 0 regnes som partall

5.2.2 Desimaltall

Desimaltall er tall som er sammensatt av en *heltallsdel* og en *fraksjonsdel*. Et eksempel kan være $36{,}9$, der 36 er heltallsdelen og 9 er desimaldelen. Temperaturavlesninger, høyder, etc. kan brukes som eksempler på størrelser der det er naturlig å bruke desimaltall.

5.2.3 Brøker

Brøk er tallrepresentasjon ved hjelp av divisjon. En brøk består av en *teller* og en *nevner*, som er adskilt med en brøkstrek. Et eksempel på en brøk er $\frac{3}{4}$. Tallet 3 er i dette tilfellet telleren, mens 4 er nevneren.

5.2.4 Rasjonale og irrasjonale tall

Et rasjonalt tall er et tall som kan skrives som en brøk der både teller og nevner er endelige heltall. Disse tallene kan ha en endelig eller periodisk desimalutvikling. $\frac{3}{4}$ er eksempel på førstnevnte type. $\frac{1}{3}$ er et eksempel på sistnevnte, da den kan skrives som $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\bar{3}$.
Irrasjonale tall er alle de tall som ikke faller innunder denne kategorien. Disse tallene har en uendelig, ikke-periodisk desimalutvikling. Eksempler på slike tall er π, $\sqrt{2}$ og e.

5.3 Multiplikasjon

Multiplikasjon, eller ganging, regnes som en av de fire grunnleggende regneartene. I multiplikasjon opererer vi med to eller flere *faktorer* som ganget sammen blir et *produkt*. Se på $5 \cdot 3 = 15$ som et eksempel; her er 5 og 3 faktorene, mens 15 er produktet.

I ungdomsskolematematikken går man videre fra den lille gangetabellen, der faktorene er heltall mellom 0 og 10, til større multiplikasjonsuttrykk der faktorene kan være heltall og desimaltall av vilkårlig størrelse. Et trivielt gangestykke som 12 ganger 8 kan for eksempel løses på følgende måte:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}2 \cdot 8 \\ \hline 6 \\ +9 \\ \hline =96 \\ \hline\hline \end{array}$$

1. Multipliser først $8 \cdot 2 = 16$.
2. 6-tallet går under streken, 1 går i mente.
3. Så ganges 8 med 1, hvilket er 8.
4. Dette tallet adderes med tallet i mente, $8 + 1 = 9$.
5. Tilslutt adderes kolonnene, $6 \cdot 1 + 9 \cdot 10 = 96$.

Svaret dermed blir $12 \cdot 8 = 96$. Hvis vi har to faktorer med mer enn ett siffer, gjær vi bare tilsvarende som nevnt ovenfor. Den eneste forskjellen er at for hvert nye tierledd, hundreledd, og så videre, må vi legge til en ny linje under streken. Disse skal så forskyves en tierplass til venstre for hvert linjeskift.

5.4 DIVISJON

Divisjon, eller deling, regnes som den inverse prosessen til multiplikasjon. I ungdomsskolen er gjerne notasjonen gitt som $a : b = c$, der a er dividend, b er divisor og c er kvotient. Dividend og divisor er tilsvarende til henholdsvis teller og nevner i brøk. Her er et eksempel på deling.

$$\begin{array}{l} \underline{96 : 8} = \underline{\underline{12}} \\ \underline{-8} \\ \;\;16 \\ \underline{-16} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

1. Setter antall ganger 8 går opp i 9 bak likhetstegnet.
2. Trekker $1 \cdot 8$ ifra 9 og får da 1 som rest.
3. 'Trekk' ned neste siffer i 96, som er 6 og får 16.
4. Gjennta så steg $1 - 3$, med 16 i stedet for 9.
5. Avslutt når en ikke har flere tall og 'trekke' ned.

Et viktig poeng med divisjon er å unngå å dele på 0. Eksempelvis kan en skrive inn en rekke verdier på kalkulatoren og få en lignende tabell som vist under.

a	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000 001
$1/a^2$	0,1	1	10	100	1000	10 000	1 000 000
$-1/a^2$	−0,1	−1	−10	−100	−1000	−10 000	−1 000 000

Poenget er at når en deler på tall som er mindre enn 1, og som blir mindre og mindre så vil svaret bli større og større. Tilsvarende når en deler på et et negativt tall mellom -1 og 0 som blir større og større, så vil svaret bli mindre og mindre – dette kan være interessant for elevene å teste selv. Dette vil gi en pekepinn på at å dele på null er tull, eller med andre ord så er uttrykket *udefinert*. Dette kan forklares ved hjelp av grenseverdier, som først introduseres på videregående. For interesserte elever kan dette være en spennende forklaring allerede på ungdomsskolen.

Det å dele med et tall som har absoluttverdi mindre enn 1, gir et svar som er større enn tallet som deles. Dette kan være vanskelig å forstå. Det er også vanskelig å komme med gode eksempler som kan illustrere dette i en reell situasjon. Et eksempel kan derimot være at man har 5 liter brus, og vil dele det opp i halvliterflasker. Da får man at det trengs 10 flasker. Dette gir regnestykket $5/0{,}5 = 10$. Dette er eksempel på hvorfor noe blir større når man deler på noe lite.

5.5 Brøkregning

Som gitt i innledningen består en brøk av en *teller* (topp) og en *nevner* (nede). Dette er en måte å representere desimaltall på. Brøker er tilsvarende divisjon og brøkstreken er i virkeligheten det samme som : i et divisjonsuttrykk. En vanlig analogi til brøkregning, er å se for seg en kake eller en pizza. Antall kakestykker kaken deles opp i tilsvarer nevner i brøken. Hvis kaken deles opp i 5 like store deler og du selv forsyner deg med 2 stykker, har du da spist $\frac{2}{5}$ av kaken. Spiser du derimot 5 kakestykker, har du da spist $\frac{5}{5}$ av kaken, eller 1 hel kake.

5.5.1 Forkorting av brøker

Noen brøker kan forkortes, dette vil si å forminske teller og nevner så mye som mulig slik at forholdet fremmdeles er det samme. Dette gjøres ved å finne faktorene i teller og nevner som er like, slik at de kan *forkortes*.

$$\frac{6}{8} = \frac{3 \cdot \mathbf{2}}{2 \cdot 2 \cdot \mathbf{2}} = \frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} = \frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \mathbf{1} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

En alternativ måte å se at 'like tall stryker hverandre' på er at om en har 2 av 2 biter i en kake, eller $\frac{2}{2}$ er dette det samme som å ha 1 hel kake. Slike tall som oppstår både i teller og nevner, kalles *divisorer*.

Et annet litt mer krevende eksempel er brøken $\frac{28}{84}$. Telleren 28 er delelig med 1, 2, 4, 7, 14 og 28. Nevneren 84 er delelig med 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 og 84. Vi ser at 1, 2, 4, 7, 14 og 28 er felles divisorer. Siden konvensjonen er å velge største felles divisor, deler vi teller og nevner på 28. Dette gir oss følgende brøk: $\frac{28}{84} = \frac{1}{3}$.

5.5.2 Addisjon og subtraksjon av brøker

Dersom flere brøker har samme nevner; også kalt fellesnevner, kan de uten videre legges sammen ved å benytte felles brøkstrek. Dersom dette ikke er tilfelle, må alle nevnerene utvides til den samme felles nevneren. Dette kan gjøres ved å finne det minste tallet som alle nevnerene deler, før man så utvider alle brøkene til denne. Denne nevneren kalles også for minste felles multiplum (Lcm). En annen måte å finne fellesnevner på er å ta produktet av alle nevnerene. Forskjellen er at minste felles multiplum ofte er vanskeligere å finne, men enklere å bruke, i motsetning til å velge produktet av nevnerene. Under følger tre eksempler.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \\
&= \frac{3+2}{6} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

1. Skriv opp uttrykket
2. Utvid brøkene
3. Skap fellesnevner
4. Trekk sammen uttrykkene
5. Regn ut teller

Dette blir da det endelige svaret ettersom 5 og 6 ikke har noen felles faktorer. Neste eksempel løses med tilsvarende metode, men nå med litt større tall.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{10}{24} + \frac{21}{84} \\
&= \frac{10}{24} \cdot \frac{84}{84} + \frac{21}{84} \cdot \frac{24}{24} \\
&= \frac{840+504}{2016} \\
&= \frac{1344}{2016}
\end{aligned}
$$

1. Skriv opp uttrykket
2. Utvid brøkene
3. Skap fellesnevner
4. Trekk sammen uttrykkene
5. Regn ut teller

Her ser vi at tallene blir så store at det er vanskelig å forkorte brøken direkte. En alternativ fremgangsmåte er å bruke minste felles multiplum som fellesnevner.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{10}{24} + \frac{21}{84} \\
&= \frac{10}{\mathbf{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{21}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{7}} \\
&= \frac{10}{24} \cdot \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{7}} + \frac{21}{84} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} \\
&= \frac{70+42}{168}
\end{aligned}
$$

1. Skrive opp uttrykket
2. Finn alle primtallsfaktorene i nevner
3. Finn de felles faktorene i nevner
4. Utvid med de resterende faktorene
5. Trekk sammen uttrykkene

Dette er en brøk som er enklere å forkorte. Underveis har vi funnet ut at nevner kan faktoriseres som $168 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{7}$. Tilsvarende kan teller faktoriseres som $70 + 42 = 112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$. Dette kan gjøres ved å dele på 2 gjentatte ganger. Hvordan en skal faktorisere tall er beskrevet tidligere. Ved å bruke faktoriseringen kan brøken forenkles ytterligere.

$$\frac{112}{168} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

5.5.3 Multiplikasjon av brøker

Multiplikasjon av brøker er en regneoperasjon som er nokså rett frem. Man multipliserer ganske enkelt teller med teller og nevner med nevner. Ta for eksempel multiplikasjon av følgende to brøker:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Skal en multiplisere store brøker er det ofte lurt å faktorisere teller og nevner før en utfører multiplikasjonen, da dette kan spare mye arbeid. For eksempel

$$\frac{21}{110} \cdot \frac{44}{63} = \frac{924}{6930},$$

er nok mye vanskeligere å forenkle enn om en faktorisere først

$$\frac{21}{110} \cdot \frac{44}{63} = \left(\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 11}\right)\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 11}{3 \cdot 3 \cdot 7}\right) = \frac{3}{3} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{11}{11} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}.$$

5.5.4 Divisjon av brøker

Ved divisjon av brøker går man frem nesten på samme vis som ved multiplikasjon. Den eneste forskjellen er ganske enkelt av man snur den ene brøken som er divisor i uttrykket. Dette kan enkelt forklares ved at divisjon og multiplikasjon er motsatt av hverandre. Vi ser dette utifra flgende sammenheng: $a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot 1/b$, hvor en nå kan betrakte a og b som brøker. La oss konkretisere dette ved å se på samme brøker som i tidligere eksempel:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{9}{8}$$

5.6 Faktorisering

Faktorisering er en elementær del av matematikken. Dette går ut på å skrive et tall som et produkt av to eller flere faktorer. Tallet 4 kan for eksempel faktoriseres ved å skrive som produktet av $2 \cdot 2$. Tallet 8 kan også faktorises. Dette kan gjøres ved å skrive det som $2 \cdot 4$. Skjønt, dette er ikke den endelige faktoriseringen av tallet 8, også kalt *primtallsfaktoriseringen*. Primtallsfaktorisering er ganske enkelt faktorisering av et tall inntil man når et primtall. I en faktoriseringsrekke vil derfor ytterligere faktorisering av et primtall være meningsløst. Når man så kommer til et primtall, er dette derfor regnet som 'endestasjonen' for faktoriseringsprosessen.

Algoritmen er ganske enkelt å hele tiden dele uttrykket med et primtall. Man starter gjerne med det minste primtallet 2. Hvis tallet ikke er delelig med 2 (les: ikke gir heltallsuttrykk), går man videre til neste primtall i rekken $- 3$. Slik fortsetter man til faktoriseringen ender opp som et primtall. La oss bruke tallet 4620 som et eksempel:

$$\begin{aligned} 4620 : 2 &= 2310 \\ 2310 : 2 &= 1155 \\ 1155 : 3 &= 385 \\ 385 : 5 &= 77 \\ 77 : 7 &= 11 \\ 11 : 11 &= 1 \end{aligned}$$

Vi ser altså at tallet 4620 kan skrives som produkt av følgende faktorer: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 4620$.

5.7 Prosentregning

Begrepet *prosent* betyr del av hundre. Prosenttegnet er %. Prosentregning bygger på begreper som allerede er innført. Hvis vi tar for oss mengden 47 % ser vi at dette kan skrives som $\frac{47}{100}$ eller $0{,}47$. Dette siste desimaltallet kalles gjerne *prosentfaktoren*. Ved å gange dette tallet med $100\,\%$ får vi antall prosent.

Prosenter er knyttet til fagfelt som statistikk og økonomi, m.m. På ungdomsskolen vil man bli spurt om å regne fra og til prosent, gitt en viss data. Følgende ligning er svært nyttig når man skal drive med prosentregning:

$$\text{Prosentandel} = \frac{\text{Andel av en størrelse}}{\text{Hele størrelsen}} \cdot 100\,\%$$

Sett at man har en klasse med 30 elever, der 17 er jenter. Man ønsker så å finne prosentandelen jenter i klassen. Måten dette gjøres på er meget enkel: Man kan ganske enkelt sette tallene inn i formelen gitt ovenfor. Først må vi definere hva som skal inngå som hvilken størrelse. *Hele størrelsen* må være hele klassen på 30 elever. *Andel av størrelsen* må således være de 17 jentene i klassen. Vi setter dette inn i formelen og får

$$\text{Prosentandel} = \frac{17}{30} \cdot 100\,\% = 56{,}67\,\%$$

Vi har et utvalg bestående av gutter og jenter. Dette utvalget er *binært*, det vil si at en størrelse i utvalget kun kan være enten A eller B. Som en logisk konsekvens følger det at hvis en størrelse ikke er A *må* den derfor være B. I vårt tilfelle kan vi vurdere det slikt: Hvis en tilfeldig elev i klassen *ikke* er en jente, må derfor eleven være en gutt. Hvis vi kun kjenner til prosentandelen jenter i klassen, samt totalt antall elever i klassen vil det derfor være svært enkelt å finne andelen gutter i klassen[4]. Prosentandelen gutter i klassen må dermed være $100\,\% - 56{,}67\,\% = 43{,}33\,\%$. Vi er nå ute etter å finne *Andel av en størrelse*. Formelen vår må dermed gjøres litt om på:

$$\begin{aligned}\text{Andel av en størrelse} &= \frac{\text{Prosentandel}}{100\,\%} \cdot \text{Hele størrelsen} \\ &= \frac{43{,}33\,\%}{100\,\%} \cdot 30 = 13\end{aligned}$$

Vi ser at det altså er 13 gutter i klassen. Vi kan kontrollere at dette stemmer ved å addere antall gutter og antall jenter i klassen. Dette skal til sammen bli 30, og vi ser at dette stemmer: $13 + 17 = 30$.

[4]En del av disse tingene vil forøvrig bli nøyere presentert i mengdelæredelen senere i kompendiet

5.8 ALGEBRA

Algebra er den delen av matematikken som brukes for å vise generelle matematiske sammenhenger. Tallregning eller aritmetikk brukes i større grad for å vise spesielle sammenhenger. I algebra innfører man bokstaver fremfor tall i matematiske uttrykk. Mange ungdomsskoleelever opplever nok dette som vanskelig, fordi man tar matematikken over i et mer abstrakt landskap. Dette er derimot bare en videreføring av begrep en allerede kjenner til.

Forståelsen for algebra er likevel essensiell om man skal klare å bruke matematikken på et høyere nivå. En måte er å knytte de algebraiske størrelsene opp mot virkelige størrelser. Forståelsen for algebra er også nært beslektet med dimensjonsforståelse. En god måte å vise mulighetene man har med algebra, er derfor å utlede algebraiske uttrykk for generelle problemstillinger, og så sette inn tall for å vise den praktiske nytteverdien. Et eksempel kan være å utlede volumet av en vase som har en firkantet grunnflate. En første algebraisk sammenheng for volum er gitt av følgende formel: Volum $=$ Areal $\cdot$ Høyde. Dette kan skrive enda enklere på følgende måte:

$$V = A \cdot h$$

I tillegg kan vi anta at arealet er gitt som produktet av de to sidelengdene a og b. Volumet kan derfor også skrives

$$V = abh$$

Merk at gangetegnet er sløyfet i det siste uttrykket. I algebra tolkes det implisitt at bokstaver som står inntil hverandre skal multipliseres. Hvis det er oppgitt at sidene i grunnflaten begge er på $10\,\mathrm{cm}$, og høyden av vasen er på $30\,\mathrm{cm}$, hvor mange kubikkcentimeter rommer da vasen?

$$\begin{aligned} V &= abh \\ &= 10\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} \cdot 30\,\mathrm{cm} \\ &= 3000\,\mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

Vi har her gått fra et generelt, algebraisk uttrykk til en spesifikk størrelse. Det er nettopp dette som er så verdifullt med algebraen. Algebra gjør at man fra et generelt grunnlag kan finne svare på uendelig mange problemer. Ved å forandre på størrelsen av sidelengdene i grunnflaten eller vasens høyde, vil man kunne få så mange forskjellige volumstørrelser som man bare vil. Det algebraiske uttrykket vil derimot være fullstendig uforandret.

Generelt

En vanlig ting å forveksle når man er ny med algebra, er forskjellen på summerings- og potensuttrykk, f.eks. $2x$ og x^2. Det første uttrykket betyr *to ganger x* og kan skrives som $x + x = 2x$. Det andre uttrykket betyr *x ganger x* og kan skrives som $x \cdot x = x^2$ (Se mer om potenser nedenfor). En annen fundamental egenskap innenfor algebra er fortegnskonvensjonen. To negative tall som multipliseres blir positivt, mens tre negative tall som multipliseres blir negativt. Generelt kan vi benytte følgende sammenheng:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{hvis } n \text{ er partall} \\ -1, & \text{hvis } n \text{ er oddetall} \end{cases}$$

Potenser

En potens består av et grunntall a og en eksponent b: a^b. Eksponenten sier ganske enkelt hvor mange ganger man skal multiplisere grunntallet med seg selv. For eksempel kan 100 skrives som $10^2 = 10 \cdot 10$, eller 1000 som $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$. Generelle regneregler for potenser er gitt i følgende tabell:

	Regel	Eksempel
1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$
2	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^3}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = 2$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
4	$a^0 \equiv 1, a \neq 0$	Per definisjon
5	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^2)^3 = 2^6$
6	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 = (2 \cdot 3)^2$
7	$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n, b \neq 0$	$\frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$

5.8.1 Rotuttrykk

Kvadratrøtter kan på mange måter sees på som inverse toer-potenser. Kvadratroten av et tall n, gir ganske enkelt hvilket tall man må gange med seg selv to ganger for å få n. For å ta et trivielt eksempel: $\sqrt{4} = 2$, fordi $2 \cdot 2 = 4$. En generell likhet er:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = a.$$

Kvadratrøtter er egentlig et spesielt tilfelle av en mer generell matematisk operator. Når vi skriver symbolet for kvadratrot, $\sqrt{}$, er dette implisitt gitt som $\sqrt[2]{}$. Konvensjonen er å utelate 2-tallet. Vi kan derimot gå opp i orden, og innføre tredjeroten $\sqrt[3]{}$, fjerderoten $\sqrt[4]{}$, og så videre. En generell rotopperator er n-te-roten $\sqrt[n]{}$. N-te-roten av et tall m, gir oss ganske enkelt - helt tilsvarende som for kvadratrøtter - hvilket tall vi må opphøye i n, altså multiplisere med seg selv n ganger, for å få m. Følgende tabell summerer regneregler for rotuttrykk:

	Regel	Eksempel
8	$\sqrt[n]{m} = m^{1/4}$	$\sqrt[4]{16} = 16^{1/4} = 2$
9	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2x$
10	$\sqrt[n]{a/b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{27}{x^6}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{(x^2)^3}} = \frac{3}{x^2}$
11	$a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$	$(\sqrt{9})^4 = \sqrt{9^4} = 9^{4/2} = 9^2 = 81$

5.8.2 Aritmetisk rekkefølge av operasjoner

Det første som må ligge i fingrene når man driver med algebra, er rekkefølgen på de aritmetiske operasjonene. Et tilforlatelig uttrykk som $4 + 3 \cdot 5$ kan enten sees på som $(4 + 3) \cdot 5 = 35$ eller $4 + (3 \cdot 5) = 19$. Slike tvetydigheter kan man ikke ha i matematikken, derfor har man definert en bestemt rekkefølge på operasjonene, for å unngå misforståelser. Rekkefølgen er som følger:

1. Løs opp parenteser.
2. Potenser
3. Gange / Dele
4. Legge til / Trekke fra

I et større uttrykk begynner en *alltid* forenklingene fra venstre til høyre. Inne i en parentes følger en fortsatt regel 2-4 hvor ganging og deling er sidestilt, og addisjon og subtraksjon er sidestilt.

5.8.3 Regneregler

Nå som det mest elementær er på plass, er det på høy tid å se på noen grunnleggende regneregler i algebra.

$$\begin{aligned} 1. \quad & a + (a + b) = 2a + b \\ 2. \quad & a - (a + b) = \quad - b \end{aligned}$$

I uttrykk nummer 1 ser vi at det kun er å løse opp parentesen, og summere hvert enkelt ledd. Dette kan vi gjøre fordi det står et plusstegn foran parentesen. I uttrykk nummer 2 ser vi derimot at vi har et minustegn foran parentesen. Dette påvirker tegnene inne i parentesen.

3. $a \cdot (b + c) = ab + ac$
4. $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Måten å løse slike uttrykk på er som vist at hver enkelt bokstav i den første parentesen skal multipliseres en gang med hver bokstav i den neste parentesen. Dette illustreres videre med de tre kvadratsetningene, som er meget sentrale i algebra og matematikk generelt:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Det er på tide å presentere et par eksempler. De tre følgende eksemplene er henholdsvis rettet mot 8., 9. og 10 klasse. Vi starter med å skrive de følgende uttrykkene så enkelt som mulig:

$$\frac{r^3}{r^4(x - y)} = \frac{r^3}{r^3} \cdot \frac{1}{r(x - y)} = \underline{\underline{\frac{1}{r(x - y)}}}$$

Som en ser, benyttet vi samme metode som ved faktorisering av brøker: $r^3/r^3 = 1$. Et noe vanskeligere eksempel er:

$$\begin{aligned} (x + 2)(x + y) + y^2 - xy + 7 &= x^2 + xy + 2x + 2y + y^2 - xy + 7 \\ &= \underline{\underline{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 7}} \end{aligned}$$

Ett siste eksempel er:

$$\frac{x^2-1^2}{(\mathbf{x+2})^2-1^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{\big((\mathbf{x+2})+1\big)\big((\mathbf{x+2})-1\big)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x+1)}\,.$$

Her ble tredje kvadratsetning $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ brukt både på teller og nevner. Videre før vi da:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x+1)} = \left(\frac{x+1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = 1\cdot\frac{x-1}{x+3} = \underline{\underline{\frac{x-1}{x+3}}}$$

5.9 LIGNINGER

En stor del av det vi gjør i matematikken er å løse ligninger. Selv om ligninger innføres som pensum i ungdomsskolen, er det egentlig ikke noe nytt. En ligning er et matematisk uttrykk som sier at to størrelser er like på begge sider av likhetstegnet. Med andre ord er det å løse det ganske trivielle regnestykket $2+2$, også det samme som å løse en ligning. Dette er fordi uttrykket også kan skrives som $2+2=x$, der x er en inntil videre ukjent størrelse. I ligninger som denne behøver man kun å utføre operasjoner på den ene siden av likhetstegnet. I den mer allmenne forståelsen av ligninger, har man derimot et langt mindre eksplisitt uttrykk for den ukjente størrelsen, der man gjerne ønsker å isolere den ukjente størrelsen på en egen side av likhetstegnet.

En meget brukbar analogi når man skal gi en innføring i ligninger, er å se for seg en skålvekt. I en skålvekt ønsker man likevekt i begge skåler, slik at hver skål er på lik høyde. Si at man vet at vekten på den ene skålen er $500\,\mathrm{g}$, mens man ikke vet vekten på den andre skålen. Hvis det er likevekt mellom begge skålene, er det dermed implisitt at også den andre skålen veier $500\,\mathrm{g}$. Matematisk tilsvarer dette å skrive $500=x$. Hvis det *ikke* var likevekt mellom skålene, ville vi fremdeles ikke visst hva vekten var på den andre skålen. Derimot kunne vi i det minste ha slått fast følgende: $500 \neq x$.

Så langt er alt temmelig enkelt. Men gitt at man så får vite følgende: Det ligger fire lodd på den ukjente skålen; ett lodd veier $200\,\mathrm{g}$, og de tre resterende loddene er alle like tunge. Hvis skålvekten er i likevekt, fortsatt med $500\,\mathrm{g}$ på den kjente siden, hvor mye veier da hvert enkelt av de ukjente loddene? For å løse et slikt problem vil det være hensiktsmessig å sette opp en ligning. Det aller første vi kan slå fast er at vi får et likhetstegn i ligninger som representerer likevekten mellom de to skålene. Vi vet allerede hva som skal stå på den ene siden av likhetstegnet (vi velger høyre side): $500\,\mathrm{g}$. Vi ser at vi da har:

$$\text{Den ukjente skålen} = 500$$

Den ukjente skålen veier altså $500\,\mathrm{g}$. Ut i fra den informasjonen vi har fått om den ukjente skålen, vet vi at den består av ett kjent lodd på $200\,\mathrm{g}$, og tre like tunge, ukjente lodd. Ved å sette dette inn i ligningen vår får vi:

$$200 + 3x = 500$$

Vi har så langt etablert en fullverdig ligning. Dette kan ofte være størstedelen av jobben. Det neste man trenger å gjøre, er å innføre den aller mest sentrale regelen ved løsing av ligninger:

Alle regneoperasjoner som utføres på en side av likhetstegnet, **må** også utføres på den andre!

Målet med ligningsløsingen er som sagt å isolere den ukjente størrelsen på sin egen side av likhetstegnet. Dette kan vi få til ved å trekke fra 200 på begge sider:

$$\begin{aligned} 200 + 3x - 200 &= 500 - 200 \\ 3x &= 300 \end{aligned}$$

Vi ser nå at vi har fått isolert den ukjente på sin egen side av likhetstegnet. Det eneste som gjenstår er nå å eliminere faktoren tre for x. Dette kan gjøres ved å dele på 3 (ekvivalent med å multiplisere med $\frac{1}{3}$) på begge sider:

$$\begin{aligned} 3x \cdot \frac{1}{3} &= 300 \cdot \frac{1}{3} \\ x &= \underline{\underline{100}} \end{aligned}$$

Altså veier de ukjente loddene 100 g hver. For å forsikre oss om at vi har regnet rett, kan vi kontrollere svaret ved å sette verdien vi har funnet inn i det opprinnelige uttrykket: $200 + 3 \cdot 100 = 200 + 300 = 500$. Kontrollen godkjenner altså svaret vi kom fram til. Eksempelet ovenfor er nokså rett fram, og kanskje litt vel omstendelig for mange av de flinkeste elevene. Likevel sier det noe elementært om ligningenes natur, nemlig *likhet på begge sider av likhetstegnet*. Videre skal vi se nærmere på forskjellige typer ligninger, der den ukjente størrelsen figurerer som ledd, faktor, teller, nevner, etc.

5.9.1 Den ukjente som ledd

Når den ukjente figurerer som ledd i en ligning, kan svaret løses like enkelt som i eksempelet ovenfor. Nedenfor følger et nytt eksempel med noen flere ledd:

$$
\begin{aligned}
5x + 3x + 4 &= 1 + 7x + 5 \\
8x + 4 &= 7x + 6 \\
8x + 4 - \mathbf{4} &= 7x + 6 - \mathbf{4} \\
8x &= 7x + 2 \\
8x - \mathbf{7x} &= 7x - \mathbf{7x} + 2 \\
x &= \underline{\underline{2}}
\end{aligned}
$$

1. Skriv opp uttrykket
2. Trekk sammen uttrykkene
3. Få x-leddet alene på venstre side
4. Få 2 alene på høyre side
5. Regn ut svaret

Setter prøve på svaret: $5x + 3x + 4 = 20$ og $1 + 7x + 5 = 20$, ved å sette inn $x = 2$. Vi ser at høyre- og venstresiden er like og at $x = 2$ altså er en gyldig løsning av ligningen.

5.9.2 Den ukjente som faktor

Iblant figurerer den ukjente størrelsen som en faktor i ligningsuttrykket. Da trenger man ofte å gå mer algebraisk til verks. Men poenget er fortsatt det samme - nemlig å isolerere alle ukjente ledd på den ene siden av likhetstegnet. La oss se på et eksempel:

$$
\begin{aligned}
x(5-3) + 4x - 6 &= x + 4 \\
2x + 4x - 6 &= x + 4 \\
6x - 6 &= x + 4 \\
6x - 6 + \mathbf{6} &= x + 4 + \mathbf{6} \\
6x &= x + 10 \\
6x - \mathbf{x} &= x + 10 - \mathbf{x} \\
5x &= 10 \\
5x \cdot \tfrac{1}{5} &= 10 \cdot \tfrac{1}{5} \\
x &= \underline{\underline{2}}
\end{aligned}
$$

1. Skriv opp uttrykket
2. Løs ut parentesen
3. Trekk sammen uttrykkene
4. Få x-leddet alene på venstre side
5. Få 10 alene på høyre side
6. Divider med 5 for å få x alene
7. Regn ut svaret

5.9.3 Den ukjente som teller

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{4} + x &= 6 \\
\frac{x+4x}{4} &= 6 \\
\frac{5x}{4} &= 6 \\
\frac{5x}{4} \cdot \mathbf{4} &= 6 \cdot \mathbf{4} \\
5x &= 24 \\
5x \cdot \frac{1}{5} &= 24 \cdot \frac{1}{5} \\
x &= \underline{\underline{4{,}8}}
\end{aligned}
$$

1. Skriv opp uttrykket
2. Få venstre side på felles brøkstrek
3. Trekk sammen uttrykket
4. Multipliser med 4 for å fjerne brøken
5. Divider med 5 for å få x alene
6. Regn ut svaret

5.9.4 Den ukjente som nevner

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{x} - 4 &= 5 \\
\frac{3}{x} - 4 + \mathbf{4} &= 5 + \mathbf{4} \\
\frac{3}{x} &= 9 \\
\frac{3}{x} \cdot \mathbf{x} &= 9 \cdot \mathbf{x} \\
3 &= 9x \\
3 \cdot \frac{1}{9} &= 9x \cdot \frac{1}{9} \\
\frac{1}{3} &= x
\end{aligned}
$$

1. Skriv opp uttrykket
2. Få x-leddet alene på venstre side
3. Trekk sammen uttrykket
4. Multipliser med x for å fjerne brøken
5. Divider med 9 for å få x alene
6. Regn ut svaret

5.9.5 Ligninger med to ukjente

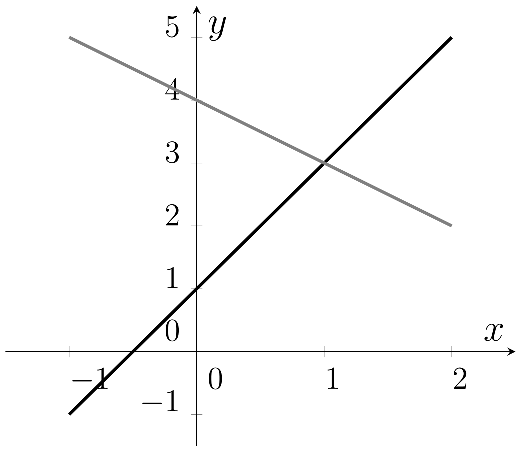
Pensumet i 10. klasse bygger så klart på alt foregående pensum. For å løse en del av de mer komplekse problemene i 10. klassematematikk, trenger man å beherske alt av algebra og ligningsforståelse som har blitt beskrevet så langt i kompendiet. Dette er noe som elevene selv trenger å øve på og holde ved like. Løsing av ligninger med to ukjente er en matematisk disiplin som er svært anvendelig innenfor mange områder. Ligningsuttrykkene som skal løses er alltid lineære, det vil si at hver enkelt ligning i ligningssettene er på formen $a \cdot x + b \cdot y = c$. Det gis generelt to forskjellige løsningsmetoder til lineære ligningssett på ungdomsskolen: Innsetting og grafisk løsning. De aller sterkeste elevene vil kanskje også ha glede av å lære seg Gauss-Jordan-eliminasjon - fra de studentene som føler seg trygge nok til å lære det bort.

5.9.6 Grafisk metode

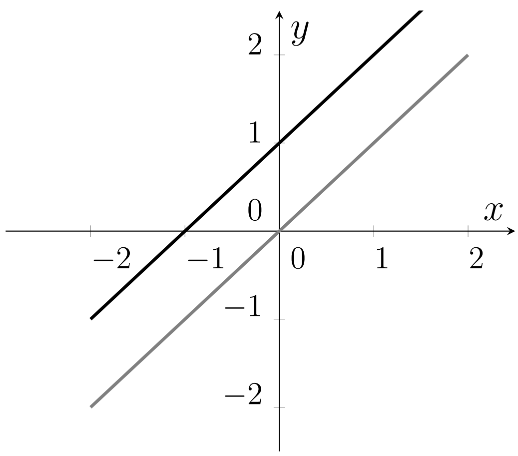
Si at vi har følgende lineære ligningssett å løse:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ y &= -x + 4 \end{aligned}$$

Hver av linjene i ligningssettet representerer et funksjonsuttrykk. Den første linjen skjærer y-aksen i punktet $(x, y) = (0, 1)$, den andre i $(x, y) = (0, 4)$. Den første ligningen har stigningstall $+2$, den andre har -1. Når vi løser ligningssett som dette, er vi ganske enkelt ute etter å finne et punkt der de to funksjonene er like, det vi si et punkt der de krysser hverandre. Når vi tegner begge funksjonene sammen kan vi enkelt finne dette punktet:



Ved å lese av på plottet, ser vi at grafene har et skjæringspunkt i $(x, y) = (1, 3)$. Altså er $x = 1$ og $y = 3$ den gyldige løsningen av problemet. Iblant kan vi også risikere å støte på ligningssett som *ikke* har noen definert løsning. Rent grafisk betyr dette at grafene aldri vil krysse hverandre:



Slike tilfeller kan oppstå når hver av ligningene i ligningssettet har samme stigningstall, men ulikt krysspunkt med y-aksen. Det kan være interessant for elevene å utforske om det finnes flere type linjer som ikke krysser hverandre. Dersom hver av ligningene har samme stigningstall *og* krysningspunkt med y-aksen - altså at de er helt like, vil hvert eneste punkt på hver av linjene være en gyldig løsning. Med andre ord har slike ligningssett uendelig antall løsninger.

5.9.7 Innsettingsmetoden

La oss igjen ta for oss ligningssettet gitt ovenfor. Her har vi allerede en enkel jobb foran oss, ettersom vi har definert at $y = 2x + 1$ og $y = 4 - x$. Ved innsettingsmetoden er dette det første vi må gjøre; nemlig å velge en av de to variablene, finne et entydig uttrykk for den, og så sette dette inn i det andre ligningsttrykket. På denne måten går vi fra to ligninger med to ukjente til en ligning med en ukjent. Denne kan løses på samme måte som vist tidligere. Når vi har fått en gyldig verdi for den ene variabelen, kan vi sette inn dette svaret i det andre uttrykket og på den måten få en gyldig verdi for den andre variabelen. I vårt ligningssett ser vi at $y = 2x+1 = 4-x$. Dette er helt klart det letteste utgangspunktet å begynne å jobbe fra. La oss se hva som skjer hvis vi prøver å løse for x:

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= -x + 4 \\
2x + x &= 4 - 1 \\
3x &= 3 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Ved å sette inn $x = 1$ i en av de to linjene får vi:

$$y = 2 \cdot (1) + 1 = 3$$

eller

$$y = -(1) + 4 = 3$$

Det betyr altså ikke noe hvilken ligning vi velger. Løsningen på ligningssettet blir da $(x, y) = (1, 3)$, akkurat som vi så i den grafiske løsningen.

5.10 Oppgaver

OPPGAVE 1

To tvillingprimtall er to primtall p og q slik at $q = p + 2$. Dersom vi studerer talllinjen og leter etter tvillingprimtall, så ser vi at alle tall som er mellom tvillingprimtallene kan deles på 6. Blandt annet har vi $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$, $(29, 31)$ og $(41, 43)$. Hvorfor er det tilfellet?

LØSNING

Vi ser at det stemmer at tallene mellom, altså $6, 12, 18, 30, 42$, kan deles på 6, men hva betyr egentlig dette? Tallet 6 er ikke et primtall, så da må vi dele det opp til $6 = 2 \cdot 3$. Da har vi at alle tallene mellom tvillingprimtall må kunne deles på både 2 og 3. Ettersom alle primtall bortsett fra 2 er odde, så må neste tall være partall. Da kan de opplagt deles på 2. I tillegg ser vi at dersom vi har tre tall i stigende rekkefølge på tallinjen, så må ett av dem kunne deles på 3; det er slik tallsystemet fungerer. Da er vi nesten i mål, for vi vet jo at enten p, $p+1$ eller $q = p+2$ må kunne deles på 3. Ettersom både p og q er primtall, så kan de ikke deles på 3, dermed må det gjelde for tallet i mellom.

OPPGAVE 2

En tennisbane har typiske mål 24 ganger 12 meter. Hvor mange kvadratmeter dekker en tennisbane?

LØSNING

For å regne ut areal av rektangler må man ganske enkelt multiplisere lengden av sidekantene med hverandre. Svar: $24 \cdot 12 = 288\,\mathrm{m}^2$

OPPGAVE 3

Prøv å forenkle regnestykket

$$\frac{121 - 36}{11 - 6}$$

på to ulike måter. Hvilken var lettest?

LØSNING

En fremgangsmåte er å legge merke til at begge tallene i teller er kvadrattall.

$$\frac{121-36}{11-6} = \frac{11^2-6^2}{11-6} = \frac{(11-6)(11+6)}{11-6} = \frac{11-6}{11-6}\cdot(11+6) = 17$$

Alternativt kan en og forenkle teller og nevner hver for se

$$\frac{121-36}{11-6} = \frac{85}{5} = \frac{5\cdot 17}{5} = 17$$

Hvilken metode som er lettest kommer nok an på øyet som ser.

Oppgave 4

Elektrisk effekt er det samme som elektrisk energi per sekund. Dette er definert som strøm ganger spenning. Hvis vi har spenning på $230\,\mathrm{V}$ og strøm på $0{,}65\,\mathrm{A}$, hvor stor effekt utgjør dette?

LØSNING

Svar: $230\,\mathrm{V}\cdot 0{,}65\,\mathrm{A} = 149{,}5\,\mathrm{W}$

Oppgave 5

I følge Newtons lover er kraft definert som masse ganger akselerasjon, $F = ma$. Si at man har vært på fisketur og fått en fisk som skal veies. Vi har kun en kraftmåler for hånden, det vil si et apparat man kan hekte fisken på som måler fiskens vekt, det vil si den kraften som utgjøres av fiskens masse. Vi vet at tyngdeakselerasjonen $a \approx 10m/s^2$. Hvis fiskens utslag på tyngdemåleren er 20 N, hvor stor masse har fisken?

LØSNING

Vi kan enkelt finne en løsning for fiskens masse. Formelen $F = ma$ er det samme som å si at $m = \frac{F}{a}$. Dette fører til at $m \approx \frac{20}{10} = 2$kg.

OPPGAVE 6

En bedrift har fast inntjening A på 100 000,- per måned. I tillegg har bedriften inntjening på 500,- per produserte enhet. Hvor mange enheter må bedriften selge for å tjene B = 1 500 000,- i løpet av ett år?

LØSNING

Vi kan sette opp dette i en ligning. Vi vet at inntjening på 1 500 000,- må være summen av inntjening for solgte enheter, pluss 100 000,- ganger 12 måneder i fast inntjening. Dette tilsvarer:

$$\begin{aligned}
12A + 500x &= B \\
500x &= B - 12A \\
x &= \frac{B - 12A}{500} \\
x &= \frac{1\,500\,000 - 12 \cdot 100\,000}{500} \\
x &= 600
\end{aligned}$$

Bedriften må dermed produsere og selge over 600 enheter årlig for å nå budsjettert inntjening. Dette tilsvarer 50 enheter i måneden, eller ca 1,67 enheter per dag.

OPPGAVE 7

Vi ønsker å finne løsning på følgende ligningssett:

$$\begin{aligned}
2x + 6y &= 14 \\
3x + 4y &= 16
\end{aligned}$$

Som nevnt tidligere er det flere forskjellige måter å løse slike ligningssett på. Vi kunne forsøkt med innsetting, grafisk metode og en rekke andre teknikker. Vi velger i stedet å prøve noe nytt; nemlig Gauss-Jordan-eliminasjon. Denne teknikken er ikke pensum før på høyskole/universitet, men teknikken er enkel og kan være interessant å lære for noen av de sterkeste elevene. Denne teknikken går ut på å sette koeffisientene inn i en matrise, og utføre et sett med elementære radoperasjoner.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fra den første til den andre matrisen har vi multiplisert rad 1 med $\frac{1}{2}$. Deretter har vi fra matrise 2 til 3 trukket 3 ganger rad 1 fra rad 2. Videre har vi fra matrise 3 til 4 delt rad 2 på -5, og så trukket 3 ganger denne nye raden fra rad 1, slik at vi står igjen med en rekke pivot-ledd som vist i den siste matrisen.

Vi ser at $x = 4$ og $y = 1$. Dette kan og bekreftes på andre måter av leseren.

Kapittel 6

Geometri

Ordet *geometri* kommer fra gresk, og er satt sammen av *geo* (jord) og *metria* (måling). Geometri er den delen av matematikken som tar for seg romlige figurer. I ungdomsskolepensum legges det stor vekt på *Euklids geometri*. Dette er en grunnleggende form for geometri som bygger på aksiomer (små læresetninger) som eksplisitt gir grunnlaget for vår matematiske forståelse av den fysiske verden rundt oss.

Et annet meget vesentlig element som innføres ved geometri i ungdomsskolen er størrelsen π. Dette tallet er en av de mest grunnleggende konstantene i verden, og dukker opp i nærmest alle sammenhenger. Et helt underavsnitt er viet til π senere i dette kompendiet.

6.1 Læreplanmål

6.1.1 8. Klasse

- Geometriske ord og uttrykk
- Tegne og konstruere
  - vinkler
  - normaler
  - paraleller
  - trekanter
  - firkanter
- Vinkelsummen i trekanter og firkanter
- Kunne gjøre om og regne med måleenheter for lengde, omkrets, areal og volum
- Vurdere næyaktighet og måleusikkerhet
- Gjøre rede for π
- Forklare og regne med det gylne snitt
- Bruke målestokk på kart og arbeidstegninger
- Utføre speiling, parallellforskyvning og rotasjon for å lage og studere mønstre

6.1.2 9. Klasse

- Studere egenskaper med prisme, pyramide, sylinder, kjegle og kule
- Studere vinkler i mangekanter
- Regne ut sider i trekanter ved å bruke:
  - Pytagoras læresetning
  - egenskaper med formlikhet
  - egenskaper med 30°-60°-90°-trekanter
- Studere egenskapene til en rettvinklet, en likebeint og en likesidet trekant
- Få innsikt i det kartesiske koordinatsystemet

6.1.3 10. Klasse

- Konstruere tangenter til en sirkel
- Regne med enhetene tid, masse, fart og tetthet
- Studere egenskapene til mangekanter
- Regne ut volum og overflate av ulike romfigurer
- Finne symmetriakser

6.2 EUKLIDS AKSIOMER

Den greske matematikeren Euklid regnes som grunnleggeren av geometri. I sitt mest kjente verk *Elementene* presenterte han grunnleggende definisjoner av den form for geometri som benyttes i dag. Dette verket er kanskje verdens mest innflytelsesrike fagtekst uansett fagområde, og brukes fortsatt som en grunnleggende innføring i geometri. Boken bygger på fem aksiomer eller postulater. Dette er generelle definisjoner eller grunnsetninger som aksepteres uten bevis. De fem aksiomene er som følger:

1. **Linjeaksiomet**
   Hvis man har to punkter - punkt A og punkt B - vil det være eksakt en rett linje som går igjennom begge punktene.
2. **Linjestykkeaksiomet**
   Hvis man har et linjestykke AB, kan dette linjestykket forlenges og forsatt være rett.
3. **Sirkelaksiomet**
   Hvis man har to punkter - punkt O og punkt A - vil det finnes eksakt en sirkel med sentrum O og radius OA.
4. **Kongruentaksiomet**
   Alle rette vinkler er *kongruente* eller like hverandre.
5. **Parallellaksiomet**
   Hvis man har et punkt P og en linje I, finnes det eksakt en rett linje gjennom P som vil være parallell med I.

Parallellaksiomet er kanskje det viktigste av Euklids fem aksiomer, fordi man gjennom dette aksiomet har bevist en rekke grunnleggende egenskaper i geometrien. Det er derfor dette aksiomet noen ganger kalles *kjerneaksiomet*.

GRUNNLEGGENDE ELEMENTER I GEOMETRIEN

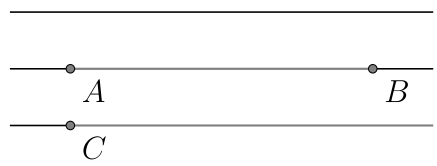
Euklids aksiomer er kanskje ikke i seg selv det mest sentrale for en ungdomsskoleelev å kunne på rams, men det er likevel her nøkkelen til å forstå all geometri ligger. Likevel vil det nok være fornuftig med en mer intuitiv og konkret presentasjon av de elementer som geometrien er bygget opp av.

PUNKTER

Et punkt er entydig definert i det kartesiske koordinatsystemet som $(x, y) = (x_0, y_0)$. Punkter er kanskje det mest grunnleggende elementet i geometrien, da det er punkter som i sin helhet definerer linjer, sirkler og alle andre geometriske figurer. I ungdomsskolepensum er gjerne punkter gitt som et kryss - $\times$.

LINJER, LINJESTYKKER OG LINJESTRÅLER

En linje er som definert av Euklids første aksiom. Linjer har uendelig utstrekning, det vil si at de fortsetter i uendeligheten til begge retninger. Et linjestykke er definert ved to punkter A og B på en linje I. Den delen av linjen som ligger mellom A og B er et linjestykke. Med andre ord vil et linjestykke ha endelig utstrekning, såfremt punktene er definert i det endelige rommet. En linjestråle er definert ved ett punkt C på en linje L. I likhet med vanlige linjer, er også en linjestråle uendelig i utstrekning. Men i motsetning til linjer har linjestråler et entydig definert startpunkt. Figuren nedenfor viser sammenhenger mellom linjer, linjestykker og linjestråler.



PARALLELLITET

La oss starte med to linjer M og N som er parallelle. Matematisk kan dette skrives som $M \parallel N$. Parallellitet kan beskrives med en rekke tosidige implikasjoner. Blant annet har vi to svært enkle og intuitive:

1. Hvis to linjer $M, N \in \mathbb{R}^2$ er parallelle, vil de aldri ha noe krysningspunkt.
2. Hvis to linjer $M, N \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ er parallelle, finnes det eksakt en linje K som er ortogonal (vinkelrett) til begge linjene.

Merk forøvrig at implikasjon 2 er gitt generelt i n-rommet $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. I ungdomsskolematematikk foregår all geometri i $\mathbb{R}^2$. Det som er interessant med implikasjon 2, er at linjen K som er ortogonal til M og N vil danne rette vinkler i skjæringspunktene. Denne implikasjonen er tosidig, altså kan man teste om to linjer er parallelle ved å se om skjæringsvinkelene er $90°$.

VINKLER

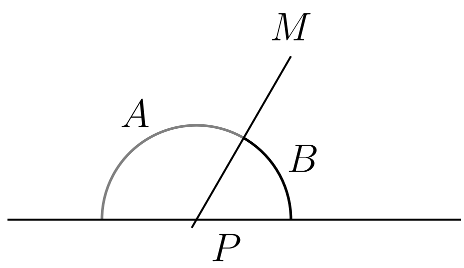
Når to linjer skjærer hverandre, eller når to linjestykker eller linjestråler har ett felles punkt, danner de sammen en vinkel. To linjer M og N som sammen danner en vinkel er følgelig ikke parallelle ($M \nparallel N$). Gitt at to linjestykker AB og BC sammen utgjør vinkelbeina, kalles vinkelen gjerne $\angle ABC$. Konvensjonen er at toppunktet er gitt som den midterste bokstaven i uttrykket.

I ungdomsskolepensum måles vinkler i grader. En vinkel φ regnes som spiss, rett eller stump ut i fra følgende kriterier:

$\varphi < 90°$	Spiss vinkel
$\varphi = 90°$	Rett vinkel
$\varphi > 90°$	Stump vinkel

Forøvrig er konvensjonen i ungdomsskolematematikk å bruke notasjonen innført ovenfor, heller enn greske bokstaver.

Videre er det særlig to ting det er verdt å merke seg med vinkler. Det første handler om begrepet *nabovinkler*. Vi har en linje L med et punkt P. Fra punktet P lager vi en linjestråle M som vist på figuren nedenfor:



Vi får da to vinkler A og B. For nabovinkler har vi følgende sammenheng:

Nabovinkler. *Summen av to nabovinkler A og B er alltid* $180°$.

Toppvinkler. *Når to linjer M og N krysser hverandre i et punkt P, dannes det fire vinkler som er parvis like store.*

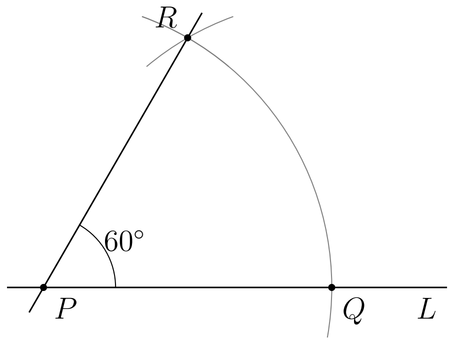
VINKELKONSTRUKSJON

Vinkelkonstruksjon er en stor del av geometripensum i ungdomsskolematematikken. Denne disiplinen utføres med linjal og passer. Av distinkte vinkler er det bare $60°$ og $90°$ som lar seg konstruere eksplisitt. Men ved hjelp av vinkelhalvering og summering av vinkler kan man i prinsippet konstruere en hvilken som helst vinkel. Videre presenteres de vanligste vinkelkonstruksjonene:

Konstruksjon av 60° vinkel

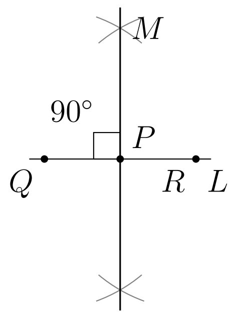
Konstruksjon av $60°$ vinkel er den mest elementære operasjonen. Dette kan gjøres på følgende måte:

1. Lag en linje L, og marker et punkt P på linjen som vist.
2. Sett passerspissen i P, og lag en bue (litt mer enn en kvart sirkel).
3. Behold utslaget på passeren, og sett passerspissen i skjæringspunktet Q mellom buen og linjen L. Lag et skjæringspunkt R på buen som vist.
4. Lag en rett linje mellom P og R. Det gir $\angle QPR = 60°$.



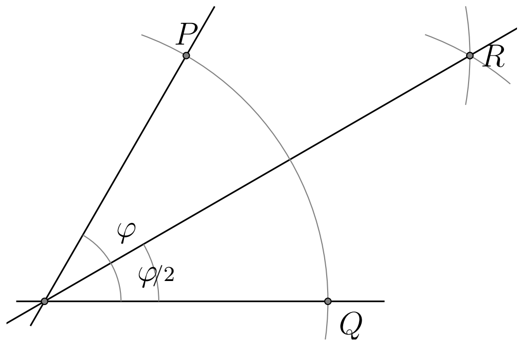
Konstruksjon av normaler

1. Lag en linje L. Marker et punkt P på linjen som vist.
2. Sett passerspissen i P, og marker to skjæringspunkter Q og R på linjen.
3. Lag et noe større utslag på passeren, og sett passerspissen i henholdsvis Q og R. Lag så to kryss, et over og et under linjen L.
4. Lag en rett linje M gjennom hvert av kryssene i punkt 3. Vinkelen der M krysser L er nå en rett vinkel.



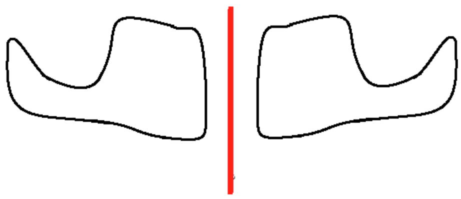
Halvering av vinkler

1. Gitt at du har en vilkårlig vinkel φ.
2. Sett passerspissen i toppunktet på vinkelen, og lag en bue med passeren, slik at buen krysser hvert av vinkelbeina i hhv punkt P og Q.
3. Sett passerspissen i hvert av krysningspunktene P og Q, og lag et nytt krysningspunkt R med passeren som vist på figuren.
4. Lag en rett linje M fra vinkeltoppunktet til krysningspunktet R. Vinkelen mellom M og hvert av de to vinkelbeina er nå $\varphi/2$.



6.3 SYMMETRI

Symmetri er et mangfoldig begrep som det er knyttet forskjellige meninger til innenfor mange forskjellige fagfelt som matematisk analyse, fysikk og humaniora. Likevel er det nok *geometrisk symmetri* man vanligvis tenker på når symmetribegrepet dukker opp. Innenfor denne grenen av symmetri, som er den som omhandles i ungdomsskolepensumet, kjennetegnes symmetri ved et gjentagende, speilvendt fysisk mønster. I symmetrisammenheng er det hensiktsmessig å definere en eller flere symmetriakser. Dette er akser som markerer skillet mellom to gjentagende mønstre. Figuren nedenfor er speilet om en symmetriakse:



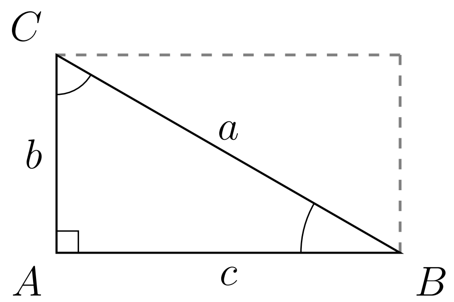
Et kjennetegn ved symmetri er at for hvert punkt i den opprinnelige figuren, kan en symmetrisk figur skapes om en symmetriakse ved å lage tilsvarende punkter i lik avstand fra aksen. Figuren gitt ovenfor er nok i overkant kompleks å speile om en symmetriakse for hånd. Det vanlige er heller å speile figurer som trekanter, firkanter o.l., og ta utgangspunkt i hvert av hjørnene. For slike figurer vil det derfor være naturlig å måle avstanden fra et hjørne til symmetriaksen, og lage et tilsvarende punkt i lik avstand fra aksen på motsatt side. Når dette er gjort for alle punktene, kan man trekke linjer mellom dem.

6.4 GEOMETRISKE FIGURER

Ved å følge Euklids aksiomer, kan man lage en rekke geometriske figurer. Her presenteres en noen av de vanligste geometriske figurene og deres egenskaper.

TREKANTER

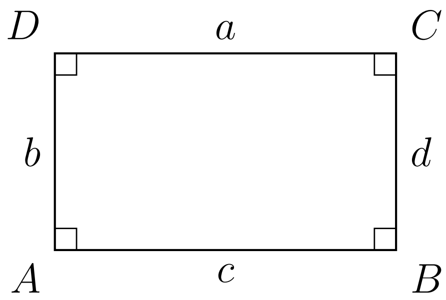
Trekanter har tre sidekanter og tre vinkler, der summen av vinklene bestandig er $180°$. Dette er universale egenskaper for alle typer trekanter. De tre vanligste typene trekanter i ungdomsskolepensum er rettvinklede, likebeinte og likesidede trekanter. En rettvinklet trekant er en trekant der den ene vinkelen er nøyaktig lik $90°$, mens en likebeint trekant er gitt ved at *to av sidekantene* er nøyaktig like lange. En likesidet trekant er en trekant der *alle sidekantene* er like lange. Det følger av en slik definisjon, at hver av vinklene i en likesidet trekant er nøyaktig lik $60°$.



Ved å ta for seg en trekant slik som den gitt i figuren ovenfor, kan man enkelt finne arealet. Hvis man ser for seg at man har et rektangel med areal $A = b \cdot c$, kan man enkelt se at sidekanten a skjærer gjennom dette rektangelet, slik at arealet da blir $A = b \cdot c/2$. Figurens omkrets blir videre $O = a + b + c$.

FIRKANTER

Firkanter er gitt på samme måte som trekanter, med fire sidekanter og fire vinkler, der summen av vinklene alltid er lik $360°$. Et rektangel er et spesielt tilfelle av en firkant, der alle vinklene er $90°$. Et ytterligere spesialtilfelle av rektangelet er kvadratet, nemlig en firkant der alle sidekantene er like lange.



Figuren ovenfor illusterer et generelt rektangel. Følgelig er arealet av rektangelen $A = a \cdot b$ og omkretsen $O = 2(a + b)$. Hvis $a \equiv b$, får vi et kvadrat. Dermed vil arealet bli $A = a^2$ og omkretsen bli $O = 4a$.

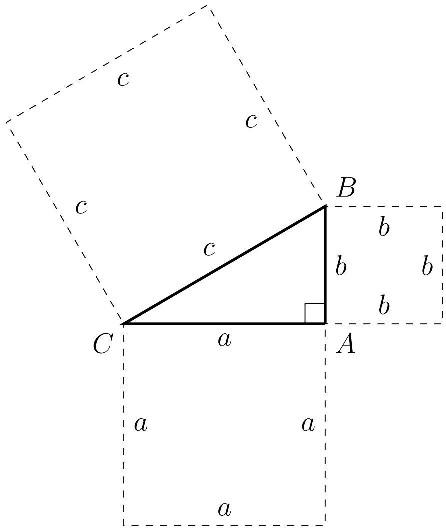
Andre typer firkanter, som ikke passer inn i rektangeldefinisjonen er parallellogram, rombe og trapes. Disse er kort presentert nedenfor:

Parallellogram	Firkant der sidene er parvis parallelle, med sidekanter a og b og høyde h. $A = a \cdot h$, $O = 2(a + b)$.
Rombe	En firkant med alle like sider a, men med vilkårlige vinkelstørrelser. En rombe er også gitt med en høyde h. $A = a \cdot h$, $O = 4a$.
Trapes	En firkant med to parallelle sider av vilkårlige lengder a, b, c og d. Avstanden mellom de parallelle sidene a og c er h. $A = \frac{h(a+c)}{2}$, $O = a + b + c + d$.

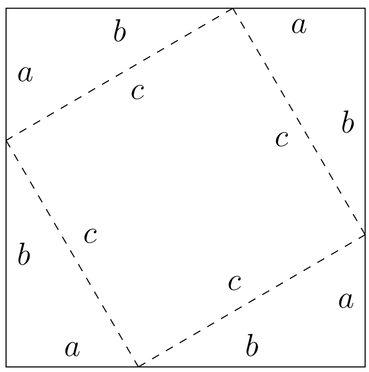
6.5 PYTAGORAS TEOREM

Pytagoras teorem er trolig verdens mest kjente teorem. Den beskriver grunnleggende egenskaper ved vinkelrette trekanter. I en vinkelrett trekant har vi tre sidekanter som kalles for kateter og hypotenus. Katetene er de to sidekantene som møtes i den rette vinkelen, mens hypotenus da er den siste sidekanten. Intuitivt kan vi slå fast at hypotenusen alltid er den lengste siden i en trekant. Ved hjelp av Pytagoras' teorem, kan dette slås fast matematisk. La oss først se på en trekant lik den som er vist på figuren under. Vi ser at hypotenusen i trekanten er sidekanten c, mens a og b er kateter. Pytagoras' teorem sier da at summen av kvadratene til katetene er lik kvadratet av hypotenusen. Matematisk kan dette formuleres slik:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

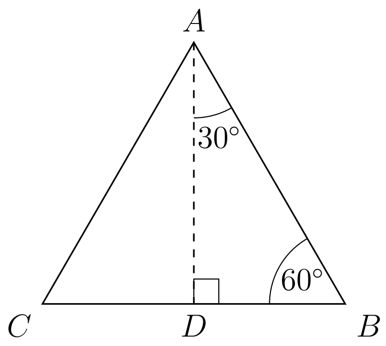


Det finnes mange måter å bevise dette teoremet på. Den kanskje enkleste måten er å måle arealet av alle de kvadratene som sidekantene utgjør, og således fastslå at arealet utspent fra hypotenusen faktisk er lik arealene av de to kvadratene utspent av katetene. Et alternativt bevis tar utgangspunkt i figuren nedenfor:



Vi ser at hver av trekantene i hjørnene har areal $A_1 = \frac{1}{2}ab$. Det totale arealet av hele kvadratet er $A = 4A_1 + c^2 = 4(\frac{1}{2}ab) + c^2 = 2ab + c^2$. Arealet kan også uttrykkes på følgende måte: $A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ved å sette de to uttrykkene for A lik hverandre får vi: $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$. Dette kan også skrives $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

6.6 Trekant med vinkelmål 30°-60°-90°



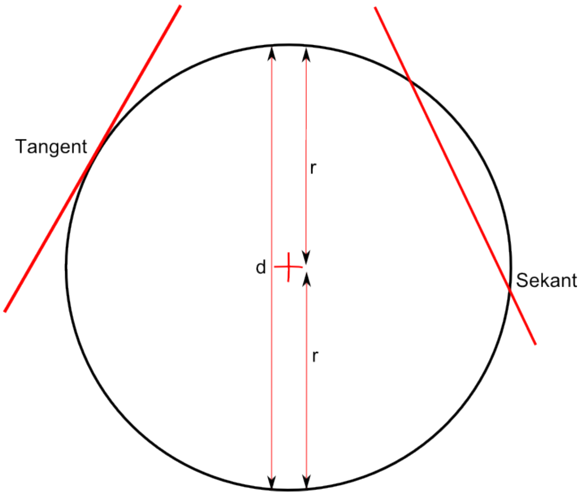
30°-60°-90°-trekanten er en viktig del av geometripensumet på ungdomsskolen. I en slik trekant er den korteste kateten halvparten av hypotenusen, mens den lengste kateten er $\sqrt{3}/2$ av hypotenusen. Disse egenskapene kan forklares til en ungdomsskoleelev på følgende måte

- Start med å betrakte en likesidet trekant $\triangle ABD$, der alle vinklene dermed er 60°.
- Nedfell så en midtnormal fra punktet A ned på linjen BC, og kall punktet D.
- Hvor stor er vinklene i trekanten ABD? Hvor langt er BD i forhold til AB?
- Den stiplede linjen deler vinkel BAC i to, slik at $\angle BAD = 30°$, $\angle DBA = 60°$ og $\angle ADB = 90°$.
- Ettersom D ligger midt mellom C og B (hvorfor?) er $BD = AB/2$. AB er altså dobbelt så lang som BD.
- Hvor lang er da AD?
- Ved å bruke
  - Pytagoras teorem
  - forholdet mellom hypotenus og korteste katet

  kan vi finne siste side i forhold til korteste katet.
- Pytagoras gir: $a^2 + b^2 = c^2$, eller $b^2 = c^2 - a^2$, der c er hypotenusen.
- Ved å sette $c^2 = AB^2 = (2 \cdot BD)^2$, $b^2 = AD^2$ og $a^2 = BD^2$, så er det bare å regne ut.
- $AD^2 = (2 \cdot BD)^2 - BD^2 = 3 \cdot BD^2$
- Da følger det at $AD = \sqrt{3} \cdot BD$.

6.7 Sirkelen

Sirkelen er blant de enkleste geometriske figurene som finnes, ettersom den kun er definert ved et sentrumspunkt S og en radius r. Sirkelen er da definert ved at *sirkelperiferien* har nøyaktig avstand r til S for alle punkter. En sirkels *diameter* er gitt som det dobbelte av radius, altså $d = 2r$. To vinkelbein med toppunkt i S og lengde r danner en *sektor* i sirkelen. Videre har vi linjer som kan skjære sirkelen på forskjellige måter. En linje som skjærer sirkelperiferien i to punkter kalles en *sekant*, mens en linje som skjærer sirkelperiferien i ett punkt kalles en *tangent*. Alt dette er oppsummert i figuren nedenfor.



Konstanten π

En særlig snedig egenskap ved sirkler er gitt ved den mystiske konstanten π. π er et irrasjonalt tall, det vil si at desimalutviklingen fortsetter i det uendelige, $\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,59...$ Denne konstanten dukker opp nærmest overalt i matematikk.

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Konstanten pi dukker også ofte opp i fysikk, der den inngår i alt fra svingetiden til en pendel, omløpstiden til planeter og til kraften mellom to partikler.

Listen kan utvides nærmest i det uendelige, men selv om π jevnlig figurerer i nokså kompleks matematikk, kan den altså defineres temmelig trivielt:

$$\pi = \frac{\text{Sirkelens omkrets}}{\text{Sirkelens diameter}} = \frac{O}{d} = \frac{O}{2r}$$

Dette gir oss en enkel måte å regne ut sirkelens omkrets på:

$$O = 2\pi r$$

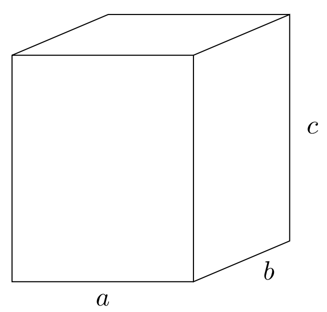
Sirkelens areal er følgelig gitt som det området som ligger innenfor sirkelens omkrets O. Dette kan beskrives som et integral, men det er ikke pensum før langt ute i R-matematikk på videregående. Derfor bør formlene $O = 2\pi r$ og $A = \pi r^2$ huskes på andre måter. God, gammeldags pugging virker kanskje nærliggende, i så fall. En kanskje nokså fløsete, men likevel god memorisk metode, er å lage dikt som hjelpemiddel. Mange har sikkert vært borte i det lyriske mesterverket «Mannen i månen»:

Mannen i månen kan smile og le
Ringen rundt hodet er π ganger d.
Men skal vi finne fjeset til mannen
Bruker vi formelen π-r-i annen.

Derimot kan det være noen elever som vil ha glede av å få litt innsikt i enkel derivasjon- og integralregning. Det vises eksempler på dette for polynomer under kapittelet om funksjoner. Der vises også sammenhengen mellom omkrets, areal og volum av runde, geometriske former.

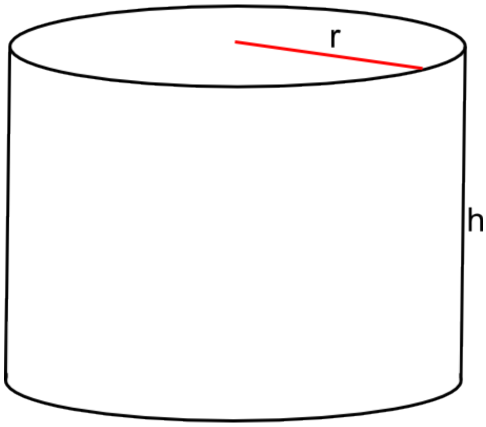
6.8 VOLUM

I den foregående delen av geometri-kapittelet har vi diskutert plan-geometri, der vi har fått en- og todimensjonale uttrykk for lengder og arealer. Nå går vi ytterligere opp en dimensjon og tar for oss volumbegrepet. Volum er ganske enkelt et videreføring av areal, der vi ganger arealet med en ytterligere lengde.



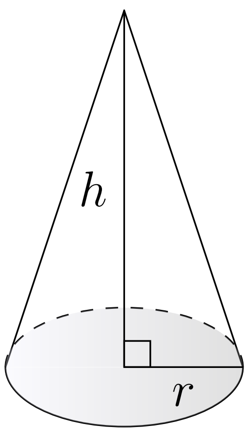
I figuren ovenfor har vi et rektangel $A = a \cdot b$ som danner grunnflaten i figuren. Videre ser vi at vi har en høyde c. Vi får dermed følgende uttrykk for volumet: $V = a \cdot b \cdot c$. For plane figurer hadde vi et 2-dimensjonalt uttrykk for arealstørrelsen og et tilsvarende 1-dimensjonalt uttrykk for omkretsen av figuren. For romlige størrelser har vi et 3-dimensjonalt uttrykk for volumstørrelsen og et 2-dimensjonalt uttrykk for overflaten av figuren. Overflatearealet av en kube som vist i figuren er dermed lik summen av alle sideflater. Kuben i dette eksemplet er kanskje den mest trivielle av alle romlige figurer. Videre presenteres noen andre romlige figurer i ungdomsskolepensumet:

Sylinderen



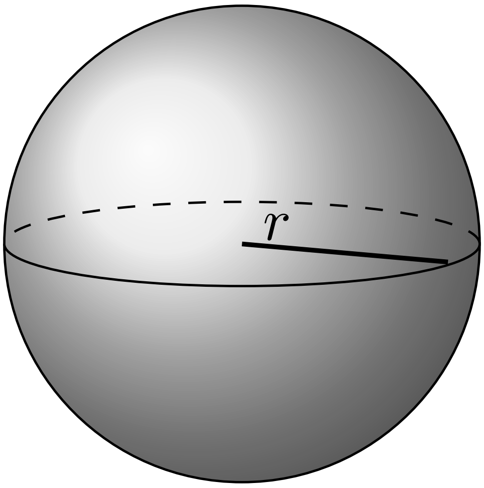
En sylinder er en figur hvis 2-dimensjonale projeksjon er en sirkel. Som vist på figuren består sylinderens grunnflate av en sirkel med radius r. Sylinderens høyde er h. Følgelig blir sylinderens volum $V = \pi r^2 h$, og overflateareal $A = 2\pi r(r + h)$.

Kjeglen



En kjegle er en figur som i likhet med sylinderen har en sirkulær grunnlate. I motsetning til sylinderen følger ikke kjeglen det samme sirkulære arealet langs hele h. Den avtar derimot lineært, helt til den har radius lik 0 ved toppunktet. Videre presenteres kun generelle formler for volum og overflateareal. Bevisene for disse lar seg lett finne, men presenteres ikke i denne teksten: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $A = \pi r(s + r)$.

KULEN



I likhet med sirkelen, som er definert ved alle de punkter med avstand r fra sentrum S, er også kulen eller sfæren definert på akkurat samme måte. Den eneste forskjellen er at det for sirkelen kun er gyldig for $\mathbb{R}^2$ mens det for kulen er gyldig for $\mathbb{R}^3$. Volumet og overflateareal er henholdsvis $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ og $A = 4\pi r^2$.

6.9 OMREGNING AV ENHETER

I geometri er grunnenheten for lengder gitt i meter - m. Likevel er det ofte fornuft å dele opp meteren i underenheter. I tabellen nedenfor er det gitt omregninger av vanligste enhetene i en dimensjon:

m	dm	cm	mm
1	10	100	1000
0,1	**1**	10	100
0,01	0,1	**1**	10
0,001	0,01	0,1	**1**

Hver gang vi konverter til en mindre enhet, må vi altså gange med 10. Tilsvarende må vi dele med 10 hver gang vi går opp til en større enhet. For enheter større enn $1\,\mathrm{m}$ er $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$ den vanligste.

Omgjøring av 1-dimensjonale enheter er ganske rett frem for de aller fleste. Problemene begynner derimot å melde seg når man går over i større dimensjoner. En vanlig misoppfatning er at $10\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} = 100\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}10\,\mathrm{m}^2$. Dette er ***ikke*** riktig! Hvis vi bryter enhetene ned til meter, ser vi fort at dette ikke stemmer: $0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}01\,\mathrm{m}^2 \neq 0{,}10\,\mathrm{m}^2$. Følgende tabell gir en oversikt:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1	100	10 000	1 000 000
0,01	**1**	100	10 000
0,0001	0,01	**1**	100
0,000 001	0,0001	0,01	**1**

Vi ser at vi nå må gange med 100 hver gang vi går ned til en mindre enhet, og dele med hundre når vi går opp til en større en. For volumuttrykk får vi en helt tilsvarende tabell:

m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1	1000	1 000 000	1 000 000 000
0,001	**1**	1000	1 000 000
0,000 001	0,001	**1**	1000
0,000 000 001	0,000 001	0,001	**1**

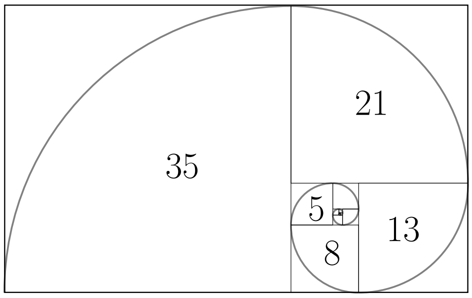
I dagligtale bruker vi som oftest enheten *liter* - L når vi snakker om volum. 1 L er definert som $1\,\mathrm{dm}^3$. Det går altså $1000\,\mathrm{L}$ per m^3.

6.10 Fibonacci

Leonardo Fibonacci (1170 - 1250) var en italiensk matematiker. Hans mest kjente arbeid er den såkalte *Fibonacci-følgen*: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ Denne følgen fremkommer ved å starte med tallet 0, deretter tallet 1 og videre etablere nye ledd i følgen ved å summere de to foregående. Dette kan også beskrives på følgende måte:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{hvis n = 1} \\ 1, & \text{hvis n = 2} \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{hvis n > 2} \end{cases}$$

En slik Fibonacci-rekke kan også representeres grafisk, som ved hjelp av Fibonacci-spiralen:



Slike Fibonacci-spiraler kalles også *gylne spiraler*. I naturen finnes det mange slike spiraler som dette. De går igjen i alt fra sneglehus til store stormsystemer. Fiboncci-tallene er også en måte å finne det såkalte *gylne snitt*. Det gylne snitt er et forholdstall og skrives gjerne som $\varphi \approx 1{,}618\,033\,989.....$ Dette er et irrasjonalt tall. Innenfor kunst har dette forholdet blitt brukt i lang tid for å lage skulpturer, malerier eller andre ting som skal ha en vakker harmoni over seg. I et billedskjønt ansikt vil for eksempel forholdstallet φ gå igjen i mange av trekkene. Men hvordan kan man så beregne dette forholdstallet? Som nevnt er Fibonaccitallene en nøkkel her. Når vi lar Fibonnaci-rekken gå mot uendelig vil forholdet mellom to påfølgende Fibonacci-tall konvergere mot φ. Tabellen nedenfor illusterer dette:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$\frac{a_n}{a_{n-1}}$	-	1	2	1,5	1,6...	1,6	1,625	1,615	1,619	1,618	1,618

6.11 Oppgaver

Oppgave 1

En konstruksjonsarbeider skal anlegge en grunnmur på et hus. Grunnmuren skal være rektangulær, med rette vinkler i hjørnene. Det er mange måter å kontrollere at vinklene er rette på. En måte er å måle diagonalen fra et hjørne til et annet og se om dette samsvarer med Pytagoras formel. La oss si at husets grunnmur har sidekantene $15\,\mathrm{m}$ og $12\,\mathrm{m}$. Hvor lang må da diagonalen være slik at hjørnet på grunnmuren skal være rett?

LØSNING

Vi husker at $a^2 + b^2 = c^2$. La oss kalle diagonalen for c. Vi får da

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2\mathrm{m}^2 + 12^2\mathrm{m}^2} \approx 19{,}21\,\mathrm{m}.$$

OPPGAVE 2

I et oljeraffineri ønsker man å lage en tank som kan lagre 2000 fat råolje. Et fat tilsvarer ca 160 liter, det vil si $0{,}16\,\mathrm{m}^3$. Med andre ord trenger vi en tank som kan romme $320\,\mathrm{m}^3$. La oss anta at tankene er sylindriske, og at vi har sett oss ut et område med plass til en tank med radius på $4\,\mathrm{m}$. Hvor høy må da tanken være for å romme 2000 fat med råolje? Hva blir overflatearealet?

LØSNING

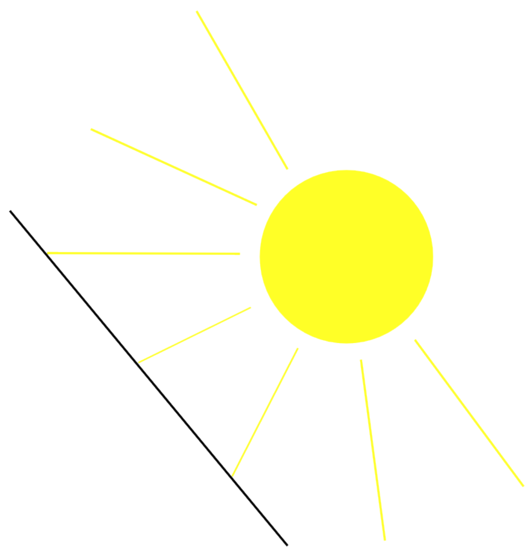
Vi vet at formelen for volum av en sylinder er $V = \pi r^2 h$. For å finne den aktuelle høyden kan vi sette opp følgende regnestykke: $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{320}{\pi 4^2} \approx 4{,}6\,\mathrm{m}$. Overlatearealet er da

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 4{,}6 + 2 \cdot \pi 4^2 \approx 215\,\mathrm{m}^2$$

OPPGAVE 3

I hvilken vinkel mot solen bør et solcellepanel rettes for å oppnå maksimal ytelse?

LØSNING



Selv uten nevneverdig teknisk kunnskap er denne oppgaven nokså opplagt. Når solcellepanelet er rettet *normalt* mot solen, det vil si slik at panelet står vinkelrett på solinnstrålingen, vil ytelsen maksimeres. Ved større avvik fra dette vil vi få stadig mindre solinnstråling inn mot panelet og ytelsen minker. Dette kan illustreres ved f.eks. å sprute vann på et papirark.

Kapittel 7

Statistikk og sannsynlighet

Sannsynlighet og statistikk er verdifulle verktøy for å skape systematikk i data og for å forutse utfall av fremtidige hendelser. Dette er to ting som gjerne går hånd i hånd. For å komme frem til gode sannsynlighetsmodeller, må vi ta utgangspunkt i data og føre statistikk over hendelsene. Med andre ord bearbeider vi informasjon om hva som har skjedd tidligere, og bruker denne kvantitative dataen til å forutse hva som vil kunne skje i fremtiden. Kvantitative metoder er forskningsmetoder som befatter seg med tall og det som er målbart, mens kvalitativ metode er en metode for generering av kunnskap hvor man undersøker hvilken mening hendelser og erfaringer har for de som opplever dem, og hvordan de kan fortolkes eller forstås også av andre. Mye av vår forståelse om naturen og vitenskapen ligger faktisk ikke i en eksplisitt forståelse av de mekanismene som skjer. Snarere bygger mye på en mer statistisk forståelse av hvordan naturen opptrer. I kvantefysikken har vi for eksempel ingen analytisk metode for å forstå hvilke tilstander et elektron kan ha, men vi kan benytte statistikk for å finne ut hvilken tilstand det *sannsynligvis* vil ha.

En slik forståelse for sannsynlighet og statistikk er selvsagt ikke pensum på ungdomsskolen. Her legges det heller vekt på innføring i sentrale begreper som utfallsrom, frekvens, m.m.

7.1 Læreplanmål

7.1.1 8.-10. klasse

- Tegne diagrammer som
  - Venn-diagram
  - søylediagram
  - kurvediagram
  - sektordiagram
  - punktdiagram
- Finne og drøfte
  - median
  - typetall
  - gjennomsnitt

  - variasjonsbredde
  - frekvens
- Vinkelsummen i trekanter og firkanter
- Gjennomføre undersøkelser og analysere data
- Finne antall muligheter når to eller flere mulige utfall kombineres
- Finne sansynlighet for hendelser
- Uttrykke sansynlighet som
  - brøk
  - desimaltall
  - prosent
- Betrakte mengder og utfallsrom

7.2 MENGDELÆRE

Hendelser er et helt sentralt begrep i både sannsynlighet og statistikk. En hendelse er et resultat av de valgene vi eller andre foretar oss. Hvis vi kaster en basketball og treffer kurven er dette en hendelse. Samme hvis vi leser på ett kapittel til en prøve og får spørsmål kun fra dette kapitlet. Det er altså en klar sammenheng mellom hendelser og vår forståelse av suksess/ikke suksess. Dette er også et viktig element i statistikk og sannsynglighet. Hva vi definerer som suksessfullt er helt klart opp til oss selv. Å kaste en ball som treffer kurven virker intuitivt som et suksessfullt utfall, men det er kun noe vi selv definerer. Med andre ord er ikke statistikken i seg selv normativ, i den forstand at den ikke sier om noe er bra/dårlig, eller gjør/ikke gjør. Dette er et viktig poeng: Statistikken er aldri selve svaret, det er snarere et middel vi kan bruke for å komme frem til svarene! Dette tenderer kanskje mer mot filosofi og vitenskapsteori, men det er nødvendig å forstå denne sammenhengen hvis man også skal forstå hvilken informasjon statistikken gir oss.

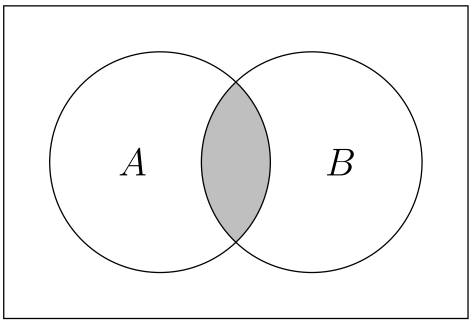
La oss gå tilbake til kastet mot basketkurven. Før vi kaster, vet vi at utrolig mange ting kan skje: Vi kan treffe kurven direkte, vi kan treffe kurven via platen på baksiden, vi kan treffe utsiden av selve ringen slik at ballen spretter av gårde, eller vi kan treffe oss selv i ansiktet(!). Dette er bare fire mulige utfall, men i prinsippet vil det være uendelig mange! Ettersom det er rimelig poengløst å jobbe med en uendelighet av mulige resultater er vi nødt til å definere et *utfallsrom*. Det vil si at vi definerer, eller grupperer, mulige utfall i store kategorier. En inndeling av utfallsrommet som virker fornuftig er å skille mellom treff og ikke treff. La oss kalle treff for A_1 og ikke treff (eller bom) for A_2. Hvis vi har et utfallsrom Ω vil det si at A_1 og A_2 er de mulige utfallene i Ω. Matematisk kan dette skrives som $A_1, A_2 \in \Omega$. La oss videre definere et tredje mulig utfall A_3, der ballen går direkte i kurven. Det er åpenbart at dette beskriver alle situasjoner der ballen går direkte oppi kurven, *uten* å være nær selve ringen, bakplaten eller andre ting på veien.

Dette utfallet er ganske enkelt et spesialtilfelle av A_1. A_1 er som sagt utfallet 'treff', uavhengig om det er et rent treff eller ikke. A_3 er et eksempel på et nytt begrep i vår lille analogi, nemlig *delmengde*. A_3 er en delmengde av A_1, en slags underkategori. Matematisk kan dette skrives som $A_3 \subseteq A_1$.

La oss ta for oss et noe mer kvantitativt eksempel, nemlig terningkast. Her er utfallene nærmest gitt av seg selv, ettersom et terningskast kun har seks mulige utfall[1]. For en vanlig, standard terning vil også sannsynligheten for å treffe ethvert nummer være helt lik, altså med en uniform sannsynlighetsfordeling. Hvis vi igjen definerer et utfallsrom Ω, vil dette bestå av alle utfall 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Dette tilsvarer $1, 2, 3, 4, 5, 6 \in \Omega$.

7.3 VENN-DIAGRAM

Vi har et utfallsrom Ω. A og B er delmengder i Ω, altså $A, B \subseteq \Omega$. La oss si at utfallsrommet er alle elever på et klassetrinn. Hendelse A er jente med blondt hår, og hendelse B er jente med grønne øyne. Det første som slår oss er at utfallsrommet rommer mer enn summen av disse to hendelsene. På en større skole kan vi for eksempel anta at det finnes jenter med brunt hår og brune øyne, altså jenter som ikke passer inn i hverken A eller B. En enda større kategori er alle guttene på klassetrinnet. Selv gutter med blondt hår og/eller gutter med grønne øyne er ikke med i delmengdene A eller B, nettopp fordi de ikke er jenter. En annen ting som slår oss er at det trolig finnes enkelte jenter med *både* blondt hår og grønne øyne. Dette er utfall i både delmengde A og B. Dette kan lett anskueliggjøres med et venn-diagram:



Hele den rektangulære rammen utgjør utfallsrommet Ω. Alt som ikke er definert av enten A eller B er utenfor de to sirklene, men fortsatt innenfor rammen. Jenter med blondt hår er representert i sirkelen A, mens jenter med grønne øyne er representert i B. I det gråmarkerte området finner vi alle jenter som både har blondt hår og grønne øyne. Disse er definert som

[1] I teorien vil det våre mulig å kaste en terning, og får den til å lande på et hjørne eller en sidekant, men for en vanlig terning er denne sannsynligheten mikroskopisk, og således noe vi kan se helt bort i fra.

$A \cap B$ - *snittet* av A og B. Hvis vi ønsker å ta for oss alle jenter med blondt hår og/eller grønne øyne, kan dette skrives som $A \cup B$ - unionen av A og B. Unionen kan også skrives på følgende måte: $(A \cup B) = A + B - (A \cap B)$. Når vi legger sammen A og B vil elementene i snittet legges sammen to ganger. Disse må altså trekkes fra for å få riktig resultat. Hvis vi ønsker å se på alle elementer i utfallsrommet som *ikke* går under A eller B, vil det være fornuftig å innføre det som kalles *komplement*. Tidligere har vi definert $A \cup B$. Det er åpenbart at vi nå ønsker å se bort fra denne delmengden i utvalget vårt. Hvis vi kaller elementene i utvalget vårt som hverken har blondt hår og/eller grønne øyne for D, vil dette kunne skrives som $D = (A \cup B)^C$, der C betegner komplementet av unionen av A og B.

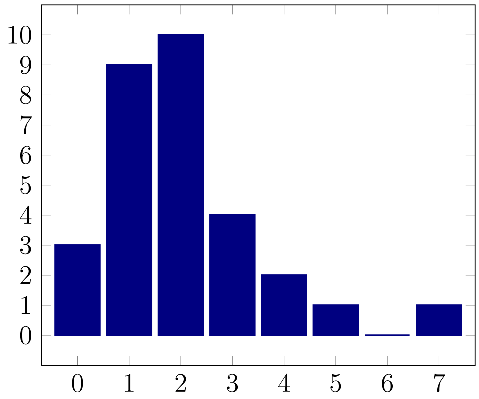
7.4 Frekvenser

Frekvens er et begrep som sier noe om gjentagende mønster over tid. Denne generell benevnelsen kan brukes innenfor en rekke fagområder. I statistikken brukes gjerne frekvens om en gitt størrelse vi ønsker å måle, for eksempel hvor mange søsken elever i en gitt klasse har. Ved å sette opp svarene i en såkalt *frekvenstabell* vil vi på denne måten kunne avdekke visse mønstre i dataen. La oss bruke nettopp dette som et eksempel:

La oss si at det i en gitt klasse er 30 elever. Vi spør hvor mange søsken hver enkelt elev har og setter dette inn i en tabell på følgende måte:

Antall søsken	**Frekvens**
0	3
1	9
2	10
3	4
4	2
5	1
6	0
7	1

Frekvenstabellen kan også brukes til å sette opp et søylediagram:



Søylediagram er en veldig god måte for å representere data grafisk. Langs x-aksen har vi satt opp antall søsken i økende antall, fra 0 til 7. Blant 30 elever var det ingen som hadde mer enn 7 søsken. Ytterligere antall vil derfor være unødvendig. Langs y-aksen har vi den relative frekvensen av antall søsken. Vi ser at 1 og 2 søsken er det aller mest vanlige, med en frekvens på henholdsvis 9 og 10. Frekvensen vil deretter avta nokså betraktelig for høyere antall søsken.

7.5 DATABEHANDLING

Gjennomsnitt

Vi har nå sett på fordelingen av antall søsken i en klasse på 30 elever. Videre ønsker vi å si noe spesifikt om denne dataen ved enkelte eksplisitte parametre. Det første som er naturlig å se på er *gjennomsnittet*. Dette er ganske enkelt summen av alle verdier delt på antall verdier. Matematisk kan dette skrives slik:

$$\text{Gjennomsnitt} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n$$

Her har vi et antall N målinger, der hver enkelt måling er gitt som a_n, for alle n. I vårt tilfelle med antall søsken, har vi 30 målinger, det vil si 30 elever i en klasse. Hver måling har sin verdi, det vil si antall søsken som elev nr. n har. Vi må da rett og slett legge sammen alle antall søsken fra hver og en i klassen og dele på antall elever. Vi har tre elever med 0 søsken. Dette utgjør da intet bidrag. Vi har 9 elever med ett søsken, altså 9 søsken totalt så langt. Videre har vi 10 elever med 2 søsken. Dette utgjør 20 søsken. Totalt har vi da 29 søsken opp til dette punktet. Ved å gjøre dette helt opp til 7 søsken får vi:

$$
\begin{aligned}
\text{Gjennomsnitt} &= \frac{1}{30}\sum_{n=1}^{N} a_n \\
&= \frac{0\cdot 3 + 1\cdot 9 + 2\cdot 10 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 + 7\cdot 1}{30} \\
&= \frac{61}{30} \approx 2{,}033
\end{aligned}
$$

Gjennomsnittlig antall søsken er dermed 2,033. Dette kan rundes ned til 2. Fra søylediagrammet ser vi at 2 søsken også er det mest vanlige. For de fleste fordelinger vil gjennomsnittet være temmelig likt målingene med høyest frekvens.

Median

Gitt at vi for en vilkårlig måling får følgende data: $1, 5, 5, 6, 8, 3, 1, 2, 4$. Ved å sorterer denne dataen i stigende rekkefølge får vi: $1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 8$. Vi ønsker å finne medianen av denne dataen. Hvis vi har et utvalg med N målinger er medianen generelt gitt som:

$$
\text{Median} = \begin{cases} a_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} & \text{Hvis N er oddetall} \\ \frac{1}{2}(a_{\frac{N}{2}} + a_{\frac{N}{2}+1}) & \text{Hvis N er partall} \end{cases}
$$

I vårt tilfelle har vi et sett med 9 målinger. N er altså odde. I dette tilfellet er medianen vår lik a_5. Vi begynner å telle fra venstre i den ordnede tallrekken, og ser at medianen er 4. Dersom vi hadde hatt samme tallrekken, bortsett fra ett 5-tall mindre, ville N vært partall. Medianen er da lik gjennomsnittet av disse to tallene. Vi ser at vi har $a_4 = 3$ og $a_5 = 4$. Gjennomsnittet er 3.5, som også er medianen i dette tilfellet.

Typetall

Et typetall er det tallet som forekommer flest ganger i et utvalg. I tilfellet med antall søsken, er det åpenbart at typetallet er 2. Dette er fordi 2 søsken forekommer hele 10 ganger, mer enn noe annet antall.

Variasjonsbredde

Variasjonsbredden er et mål for differansen mellom minste og største verdi i et utvalg. Både målingen av antall søsken og den generiske tallrekken har variasjonsbredde lik 7. Variasjonsbredden sier noe om spredning av dataen, mens de foregående begrepene sier noe om sentraltendensen.

7.6 SANNSYNLIGHET

Ofte ønsker vi å måle hendelser der utfallene ikke er gitt på forhånd. Dette kalles *stokastiske forsøk*. Å kaste en terning er et eksempel på dette. Som tidligere nevnt vet vi at utfallsrommet er $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Vi vet også at hver verdi på terningen er gitt av en uniform sannsynlighetsfordeling. Dette betyr ganske enkelt at alle mulige utfall har like stor sannsynlighet. Sannsynligheten for å kaste en sekser er derfor

$$P(\text{Terningkast 6}) = \frac{1}{6} \approx 0{,}166$$

Vi har her innført en generell notasjon for sannsynlighet: $P(\cdot)$. P står i dette tilfellet for *probability*, og utsagnet inni parentesen er hendelsen.

Når vi drøfter sannsynlighet må vi definere det som kalles *gunstige* og *mulige utfall*. Sannsynligheten for å trille en sekser er ett mulige utfall av totalt seks. Dette er gitt av den generelle formelen for sannsynlighetsberegninger:

$$P(\text{Vilkårlig hendelse}) = \frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}}$$

Vi kan ut i fra dette utvide forsøkene våre. Vi kaster en terning på nytt, og ønsker å finne sannsynligheten for å få enten en sekser eller en femmer. Vi har i dette tilfellet stadig seks mulige utfall, men denne gangen har vi definert to gunstige utfall, som gjør at sannsynligheten er

$P(\text{5 eller 6}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Sannsynlighet kan sees på enten som brøker, desimaltall eller prosentuttrykk. Felles for dem alle er at deres verdi er begrenset av en nedre og øvre grense. For brøker og desimalverdier kan enhver sannsynlighet kun være et tall mellom 0 og 1, for prosentuttrykk mellom $0\,\%$ og $100\,\%$. Hvis vi ønsker å regne ut sannsynligheten for å få 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 på terningkast er det nokså åpenbart at vi får en sannsynlighet på 1, ettersom vi har seks gunstige utfall over seks mulige.

7.7 KOMBINATORIKK

Kombinatorikk er et felt innenfor matematikken som er nært knyttet opp til statistikk og sannsynlighet. Kombinatorikk går ganske enkelt ut på å telle antall mulige kombinasjoner man kan ordne et datasett på. La oss ta et trivielt eksempel med en kortstokk.

Gitt at vi har ett kort i hånden, en kløver. Hvor mange kombinasjoner kan vi ordne dette kortet på? Svaret er selvsagt kun en måte:

$$\clubsuit$$

Hva så om vi får inn ett kort til, en hjerter? Vi ser at dette gir to mulige kombinasjoner.

$$\clubsuit\heartsuit \quad \heartsuit\clubsuit$$

Vi får inn enda et kort. Denne gangen et spar. Dette gir seks mulige kombinasjoner:

$$\begin{array}{ccc} \clubsuit\heartsuit\spadesuit & \clubsuit\spadesuit\heartsuit & \heartsuit\clubsuit\spadesuit \\ \heartsuit\spadesuit\clubsuit & \spadesuit\heartsuit\clubsuit & \spadesuit\clubsuit\heartsuit \end{array}$$

Til slutt tar vi inn et siste kort, en ruter. Dette gir oss 24 mulige kombinasjoner, noe som får bli opp til leser å bevise. Allerede kan vi se at det har dukket opp et mønster. La oss se på følgende tabell:

Antall kort	**Antall kombinasjoner**
1	1
2	$2 = 2 \cdot 1$
3	$6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$
4	$24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Vi ser at vi får et gjentagende mønster der antall kombinasjoner oppnås ved å gange stadig lavere tall med hverandre. Denne operatoren kalles *fakultet*, og kan matemtisk beskrives slik:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$$

Fakultetsoperatoren er en meget raskt stigende operator. Dette betyr at for flere elementer vil vi få svært mange forskjellige kombinasjoner. Hvis vi ser på en hel kortstokk med 52 kort, vil denne kunne stokkes på $52!$ forskjellige møter. $52!$ ser kanskje tilforlatelig ut, men det gir et vanvittig stort tall:

$$
\begin{aligned}
52! = &\, 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766 \\
&\, 975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000
\end{aligned}
$$

Vi kommer opp i enorme summer for fakultetet av tall mye mindre enn 52, så det er åpenbart at det ikke vil være mulig å faktisk telle alle mulige kombinasjoner på konvensjonell måte. Det er her kombinatorikken har sin styrke.

7.8 Bayes setning*

Bayes setning handler om to avhengige hendelser, og er et veldig viktig teorem i sansynlighet. Dette er pensum på videregående skole, men kan være motiverende for mange elever, ikke bare de aller flinkeste. Vi starter med å vise teoremet:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Med ord blir dette: *Sannsynligheten for A, gitt B, er produktet av sannsynligheten for A og sannsynligheten for B, gitt A, delt på sannsynligheten for B*. Dette blir fort komplisert å huske. Vi kan, ved hjelp av symmetri, skrive formelen på en måte som er enklere å huske:

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

.

Her har vi altså bare multiplisert med sannsynligheten for B på begge sider. Selv nå kan formelen virke abstrakt, så vi følger opp med et eksempel for å øke forståelsen av dette resultatet.

Gitt en skole med 840 elever, der 360 er jenter og 480 er gutter. 5 av jentene og 34 av guttene er fargeblinde. Vi velger en tilfeldig elev på denne skolen, og det viser seg at denne er fargeblind. Vi er så interessert i å finne sannsynligheten for at denne eleven også er en jente. Altså, dersom J representerer jente og F representerer fargeblind, hva er $P(J|F)$?

Vi har at

$$P(J) = \frac{360}{840}, P(F) = \frac{5+34}{840}, P(F|J) = \frac{5}{360},$$

og kan da bruke bayes setning. Løsningen blir

$$P(J|F) = \frac{P(J) \cdot P(F|J)}{P(F)} = \frac{\frac{380}{840} \cdot \frac{5}{360}}{\frac{39}{840}} = \frac{5}{39}.$$

Vi ser altså at sannsynligheten for at den fargeblinde eleven er jente er ca. en åttenedel.

7.9 Oppgaver

Oppgave 1

Solceller er såkalte halvledere som leder strøm når panelet blir belyst. Panelene består hovedsakelig av krystallisert silisium, såkalt c-Si. For å forbedre den elektriske ledningsevnen tilfører man panelet urenheter, i form av bor- og fosfor-atomer. Dette kalles for *doping*. I dopingprosessen har man funnet ut at dopingkonsentrasjonen blir for lav i 5% av tilfellene. Hvis fabrikken produserer 1200 enheter per dag, hvor mange paneler vil da ha for lav dopingkonsentrasjon? Hvor mange vil ha tilstrekkelig doping-konsentrasjon?

Løsning

La oss kalle hendelsen med for lav dopingkonsentrasjon for A. Vi vet fra oppgaveteksten at $P(A) = 0,05$. Antall produserte enheter er $N = 1200$. Antall enheter med for lav dopingkonsentrasjon blir da $N_1 = 0,05 \cdot 1200$ enheter $=$ 60 enheter. Antall enheter med tilstrekkelig dopingkonsentrasjon blir $N_2 =$ $0.95 \cdot 1200$ enheter $= 1140$ enheter.

For panelene med tilstrekkelig dopingkonsentrasjon har vi brukt sammenhengen $P(A^c) = 1 - P(A)$. Alternativt kunne vi tenkt at vi i utgangspunktet hadde 1200 produserte enheter, hvorav 60 var defekte. De resterende må da *ikke* være defekte, altså $N_2 = N - N_1 = 1200 - 60 = 1140$.

Oppgave 2

I konstruksjon av rør til væsketransport er man interessert i at innsiden av rørene skal være så glatte som mulig. Dette er fordi ruhet på innsiden av rørene bremser væskestrømmen, og man må bruke mer energi på å pumpe. På en fabrikk som produserer rør har man brukt to forskjellige materialer i produksjonsprosessen. Målinger har blitt foretatt, og de to forskjellige rørene har relativ ruhet (gitt i mm) gitt av tabellen nedenfor.

Rørtype 1	**Rørtype 2**
0,54	0,14
0,43	0,31
0,57	0,33
0,39	0,23
0,61	0,29
0,33	0,40

Finn gjennomsnitt, median og variasjonsbredde for begge rørtypene. Hvilken rørtype er best med tanke på å minimere relativ ruhet?

Løsning

Vi sorterer relativ ruhet for de to rørtypene i stigende rekkefølge: For rørtype 1 får vi

0,33 0,39 0,43 0,54 0,57 0,61

For rørtype 2 får vi

0,14 0,23 0,29 0,31 0,33 0,40

Ettersom vi har 12 rørprøver (6 av hver type) må vi bruke følgende formel for medianen: $m = \frac{a_3+a_4}{2}$. For rørtype 1 gir dette $m_1 = 0,5 \cdot (0,43+0,54) = 0,485$ mm. For rørtype 2 får vi $m_2 = 0,5 \cdot (0,29 + 0,31) = 0,30$ mm.

Gjennomsnittet for rørtype 1 er:

$$n_1 = \frac{0{,}33 + 0{,}39 + 0{,}43 + 0{,}54 + 0{,}57 + 0{,}61}{6} = 0{,}478$$

For rørtype 2:

$$n_2 = \frac{0{,}14 + 0{,}23 + 0{,}29 + 0{,}31 + 0{,}33 + 0{,}40}{6} = 0{,}283$$

Variasjonsbredden for de to rørtypene er $d_1 = 0,61 - 0,33 = 0,28$ mm og $d_2 = 0,40 - 0,14 = 0,26$ mm. Resultatene er summert i denne tabellen:

	Rørtype 1	**Rørtype 2**	**enhet**
Gjennomsnitt	0,478	0,283	mm
Median	0,485	0,300	mm
Variasjonsbredde	0,280	0,260	mm

Vi ser at rørtype 1 har både høyere gjennomsnittlig ruhet og større median-ruhet enn rørtype 2. I tillegg er variasjonsbredden for de to rørtypene nokså like. Vi kan derfor forvente å få lavere ruhet med rørtype 2 enn med rørtype 1.

OPPGAVE 3

Du skal forvalte en aksjeportefølje og vurderer å investere i et selskap. Du har 10.000,- å investere, og du har gjort beregninger som viser at det er 70% sannsynlighet for at investering i selskapet vil gi positiv avkastning, altså $P(A) = 0,70$. Videre har du beregnet at sannsynligheten for avkastning på mer enn 20% *hvis* avkastningen er positiv ligger på 90%, $P(B|A) = 0,90$. Vi får i tillegg oppgitt at $P(A \cap B) = 0,65$. Hva er sannsynligheten for at avkastningen vil bli større enn 20%?

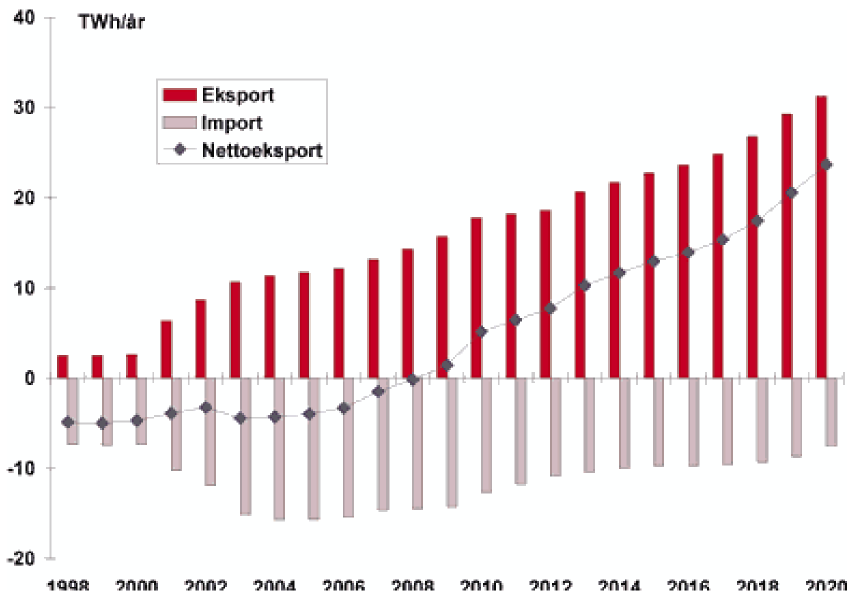
Løsning

I denne oppgaven støter vi på noe som kalles *betinget sannsynlighet*. Vi har sannsynligheten for at en ting B skal skje, gitt at A har skjedd. Dette kan skrives på følgende måte: $P(B|A)$. For løsning av betinget sannsynlighet har vi et teorem som strengt tatt ikke er pensum for videregående, men som likevel sier noe grunnleggende om anvendeligheten til sannsynlighetsregning:

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A)} = \frac{0,65}{0,90} = 0,722 = 72,2\%$$

OPPGAVE 4

Norge er en stormakt innenfor energi. Per i dag er vi verdens fjerde største oljeeksportør, verdens tredje største gasseksportør og verdens tiende største elektrisitetseksportør. Norsk politikk legger særlig vekt på at Norge skal styrke sin posisjon som eksportnasjon av elektrisitet i tiden fremover. Figuren nedenfor er hentet fra Norsk Offentlig Utredning - NOU 1998:11. Den viser en ønsket utvikling av kraftutveksling mellom Norge og våre naboland.



I tabellen nedenfor er det gitt en oversikt over kraftproduksjon og netto forbruk av elektrisk energi i Norge fra 2005 til 2010:

år	Produksjon (TWh)	Netto forbruk (TWh)
2005	115	122,5
2006	140	120
2007	120	127
2008	139	120
2009	142	123
2010	130	125

Var Norge nettoimportør eller -eksportør i denne perioden? Hva var gjennomsnittlig produksjon og forbruk i TWh i perioden?

Løsning

Dersom vi et år har produksjon $>$ netto forbruk har vi en netto eksport. I motsatt fall, når produksjon $<$ netto forbruk har vi netto import. For perioden 2005-2010 tilsvarer dette

år	Netto kraftutveksling (TWh)
2005	$-7{,}50$
2006	20,00
2007	7,00
2008	19,00
2009	19,00
2010	5,00
Totalt	48,50

I perioden 2005-2010 var det altså en netto eksport av kraft på 48,5 TWh. Gjennomsnittlig kraftproduksjon var på 131 TWh og gjennomsnittlig forbruk lå på 122,9 TWh. Grunnen til at det er såpass store svingninger i norsk kraftproduksjon er på grunn av den høye andelen fornybar energi. I Norge kommer ca. 98% av all kraftproduksjon fra vannkraftanlegg. Disse er avhengige av fyllingsgrad i magasinene, tilsig, etc. Disse parametrene styres helt og holdent av klimaet, hvilket vi selvfølgelig ikke råder over. Variasjonen i netto forbruk styres i større grad av den generelle økonomiske situasjonen. I tider med høykonjunktur vil det for eksempel brukes mer kraft på kraftkrevende industri. Vi ser at dette var tilfellet rundt finanskrisen rundt 2008, ettersom vi får et ganske markant fall i netto forbruk fra 127 TWh til 120 TWh.

Kapittel 8

Grafer og funksjoner

Grafer og funksjoner er to kraftige verktøy for å behandle matematisk data. I ungdomsskolematematikk opererer man med et to-dimensjonalt koordinatsystem med en x- og en y-akse. Dette gjør at man kan plotte utviklingen av en gitt størrelse langs y-aksen som en funksjon av enheter langs x-aksen. Begreper som derivasjon og integrasjon blir først introdusert på videregående, men de mest oppvakte elevene vil kanskje ha glede av å lære litt om dette allerede nå.

8.1 Læreplanmål

8.1.1 8. Klasse

- Lære å bruke kartkoordinater
- Sette punkter i koordinatsystem
- Tegne grafer
- Lage funksjoner for å vise sammenheng mellom to størrelser

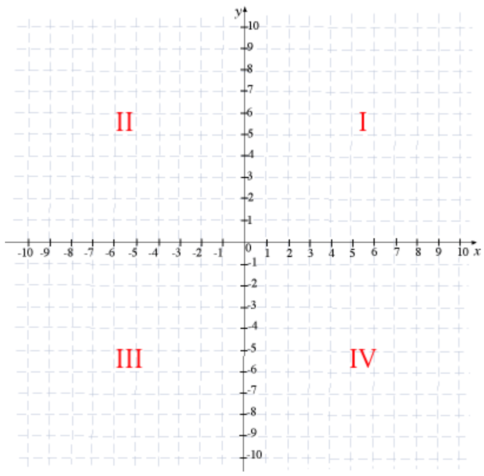
8.1.2 9. Klasse

- Arbeide med lineære funksjoner
- Beskrive funksjoner med tabeller og grafer
- Beskrive praktiske situasjoner med grafer

8.1.3 10. Klasse

- Tegne og tolke grafer
- Beskrive sammenhenger mellom
  - tekst
  - tabell
  - formel
  - graf
- Avgjøre om en funksjon er
  - proporsjonal
  - omvendt proporsjonal
  - lineær
  - kvadratisk
- Løse likninger med to ukjente, både grafisk og ved regning.

8.2 Det kartesiske koordinatsystemet



Figuren ovenfor illustrerer det såkalte *kartesiske koordinatsystemet*. Dette navnet kommer fra den franske vitenskapsmannen og filosofen René Descartes, som i vitenskapelige sammenhenger brukte sitt latinske navn *Cartesius*. På ungdomsskolen er presiseringen 'kartesisk' nokså overflødig. Polare koordinater introduseres riktignok så vidt i 10. klasse-pensum, men hoveddelene av matematikken på ungdomsskolen ligger i det kartesiske systemet.

Det kartesiske koordinatsystemet er et plan, eller ark, som fortsetter og fortsetter i det uendelige. I planet trekker vi to linjer som står vinkelrett på hverandre. Skjæringspunktet mellom aksene kalles for origo, eller sentrum av planet, og gir oss et referansepunkt. På figuren er det tegnet inn fire kvadranter: I, II, III og IV. Kvadrantene er adskilt av aksene. Første kvadrant er definert som området der både x- og y-aksen har positive verdier, andre kvadrant som området der y-aksen har positive verdier og x-aksen negative, og så videre. Dette mønsteret følger en del av den matematiske konvensjonen for vinkler, ved at de er definert positiv – altså i stigende verdi – ved dreining *mot* klokka.

Et punkt P_0 i koordinatsystemet skriver vi gjerne som $P_0 = (x_0, y_0)$. Det første man kan gjøre for å finne dette punktet, er å tegne opp en rett linje med avstand x_0 fra y-aksen – med andre ord parallelt med y-aksen. Det samme kan gjøres ved å tegne opp en tilsvarende linje i avstand y_0 fra x-aksen. Vi får da et krysningspunkt P_0 mellom linjene våre to linjer. Ved å bruke denne notasjonen kan origo skrives som $O = (0, 0)$.

8.3 GRAFER

Et koordinatsystem kan hjelpe en til å forstå hvordan funksjoner oppfører seg, og er grunnlaget for alt innenfor funksjonslære på ungdomsskolen. I det foregående avsnittet så vi hvordan man kunne definere et enkelt punkt i det kartesiske koordinatsystemet. Dette kan være nyttig nok i mange sammenhenger, men ofte ønsker man å illustrere sammenhengen mellom to variable størrelser over et større spenn av verdier. Grafer er en nyttig måte å gjøre dette på, og figuren nedenfor illustrerer grafen til en vilkårlig funksjon f. Vi ønsker nå å beskrive noen viktige egenskaper ved funksjoner.

Definisjonsmengde Definisjonsmengden D_f er definert som alle de verdier grafen kan ha langs x-aksen.

Verdimengde Verdimengden V_f er definert som alle de verdier grafen kan ha langs y-aksen.

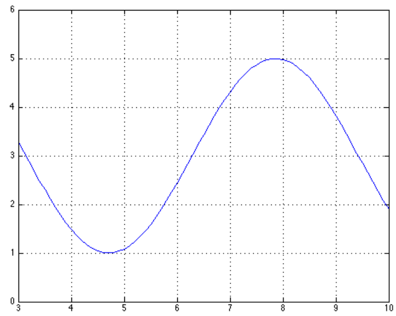
Toppunkt Et toppunkt er et punkt på grafen hvor alle nærliggende punkter har lavere y-verdi.

Bunnpunkt Et bunnpunkt er et punkt på grafen hvor alle nærliggende punkter har høyere y-verdi.

Nullpunkter Stedene hvor grafen skjærer x-aksen kalles nullpunktene til funksjonen.

Skjæringspunktet med y-aksen Stedet hvor funksjonen krysser y-aksen skjer når $x = 0$. Denne verdien $f(0)$ kalles gjerne for konstantleddet til funksjonen[1].

[1] Dette gjelder selvsagt bare for tilstrekkelig 'pene' funksjoner som er definert for $x = 0$. På ungdomsskolen er det heldigvis bare slike funksjoner som studeres.

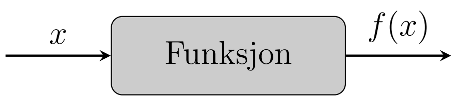


Fra figuren ser vi at definisjonsmengden er fra $x = 3$ til $x = 10$. Dette kan også skrives som $D_f = [3, 10]$. Bunnpunktet til funksjonen er $(4.7, 1)$, og toppunktet til funksjonen er $(7.7, 5)$. En fellesbetengelse for topp- og bunnpunkt er ekstremalpunkter. Merk at en graf kan ha flere ekstremalpunkter, og for å skille mellom disse bruker vi begrepene globale og lokale ekstremalpunkter. Det globale toppunktet er det punktet på grafen med størst y-verdi, tilsvarende er det globale bunnpunktet det punket på grafen med minst y-verdi. De andre ekstremalpunktene kalles for lokale topp- og bunnpunkter. Verdimengden blir dermed fra $V_f = [1, 5]$, siden dette er henholdsvis minste og største y-verdi funksjonen kan ha.

8.4 Funksjoner

Grafer kan beskrives ved hjelp av funksjoner. Grafen i forrige avsnitt kan beskrives som en funksjon f av x. Dette kan vi se ettersom y-verdien av f forandres langs x-aksen. Når vi beskriver funksjoner, er det vanlig å skrive dem som y eller $f(x)$. Den nevnte grafen kan beskrives av funksjonen f som:

$$y = f(x) = 3 + 2\sin(x), x \in [3, 10]$$

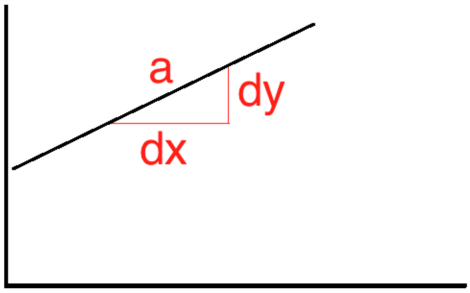


En funksjon kan sees på som en slags 'maskin'. Denne maskinen tar inn et tall og spytter ut et annet tall. I vårt tilfelle tar funksjonen in en variabel x og dytter ut et tall $y = f(x)$. Dette kan summeres i en tabell:

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	3,28	1,47	1,08	2,44	4,31	4,98	3,82	1,91

Man kan merke seg at verdiene for x og $f(x)$ ligger innenfor henholdsvis D_f og V_f hele tiden. Siden sinus ikke er pensum, bør du heller vise regningen ved hjelp av $\sqrt{x}$, x^2 eller en annen funksjon elevene er kjent med.

8.5 LINEÆRE FUNKSJONER



Det finnes mange måter å definere en lineær funksjon på. En uformell definisjon er:

En funksjon kalles lineær om den oppfører seg som en rett linje.

Dette er en grafisk forklaring. Vi kan også beskrive en rett linje som en funksjon

$$f(x) = ax + b\,,$$

hvor a er stigningstallet og $f(0) = b$ er konstantleddet. For å bestemme stigningstallet til en lineær funksjon, kan en bruke ettpunktsformelen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,,$$

der (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er to punkter på grafen. Skal dette gjøres for hånd er det nyttig å velge punktene et stykke fra hverandre, da dette minker den *relative* usikkerheten. Plasseringen av punktene kan velges fritt, siden funksjonen er lineær. For å finne b, ser en på hvor grafen skjærer y-aksen. Ut i fra dette kan en finne funksjonsuttrykket til f, kun ved å studere grafen til funksjonen.

8.6 PROPORSJONALITET

y og x er proporsjonale når $y = kx$. Her er k konstant og kalles *proporsjonalitetsfaktoren*. Vi observerer at dette er ligningen for en lineær funksjon uten konstantleddet b, og beskriver da en linje som går gjennom origo. Altså er y og x proporsjonale hvis $y = 3x$, men ikke hvis $y = 3x+1$. I andre tilfeller kan vi få såkalt *omvendt proporsjonalitet*. Dette er tilfellet for funksjoner som $y = \frac{k}{x}$. For større verdier av x vil da y avta. Noen ganger blir tegnet $\propto$ brukt for å betegne at to størrelser er proposjonale eller omvendt proposjonale, og$y = 3x$ blir for eksempel brukt i statistikk.

8.7 DERIVASJON*

Dersom en vil finne det ekstakte stigningstallet til en funksjon som ikke er lineær, må en bruke derivasjon. Dette er ikke pensum på ungdomsskolen, men fremgangsmåten er tilsvarende som ettpunktsformelen. For noen vil dette være motiverende, samtidig som det kan det gi videre innsikt i matematikk.

For en kontinuerlig funksjon som ikke er lineær, vil stigningstallet til funksjonen forandre seg. Vi må derfor snakke om stigningstallet til funksjonen i et spesifikt punkt, $\big(x, f(x)\big)$. Dette er i kontrast til lineære funksjoner, hvor stigningstallet er likt for alle punkter.

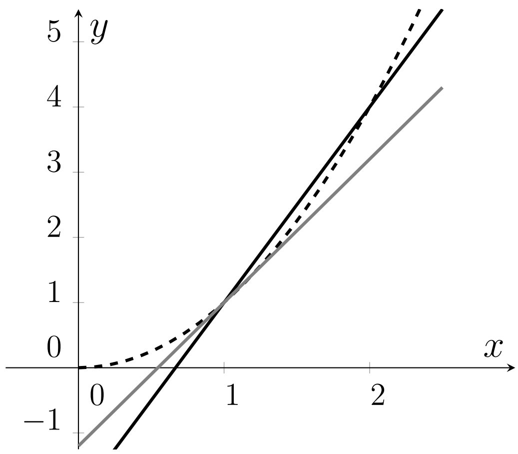
La oss vise fremgangsmåten med et eksempel. Vi ønsker å finne stigningstallet til funksjonen $f(x) = x^2$ for $x_1 = 1$. Vi kan da bruke ettpunktsformelen for punktet $(1, f(1))$, og et punkt med større verdi, for eksempel $(2, f(2))$. Stigningstallet blir da

$$a \approx \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 1$$

Ved å velge det det andre punktet nærmere $(1, f(1))$, for eksempel punktet $(1.1, f(1.1))$ får vi en bedre verdi for stigningstallet

$$a \approx \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{1.1^2 - 1^2}{0.1} \approx 2.1$$

Ved å velge punkter med x-verdier når $x_1 = 1$, ser det ut som at stigningstallet a nærmer seg 2. Det å velge verdier nærmere og nærmere , kan en se på som å la $x_2 = x_1 + h$, hvor h



er et lite tall som blir mindre og mindre. Ovenfor ble først $h = 1$ brukt, så $h = 0.1$. Ved å la h nærme seg null, vil formelen bli mer og mer nøyaktig. Dette kan skrives som

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2 + h \\
&= \quad 2
\end{aligned}$$

Overgangen fra linje 3 til linje 4 kan en se ved å gange ut parentesen $(1+h)^2 - 1^2 = (1+h)(1+h) - 1 = (1+2h+h^2) - 1 = (2+h)h$. Eventuelt kan en bruke tredje kvadratsetning på $(1+h)^2 - 1^2 = (1+h+1)(1+h-1)$, som gir samme resultat. Merk at litt algebra var nødvendig først, ettersom å sette $h = 0$ direkte gir null i nevner.

Det å derivere en funksjon av x, er det samme som å finne stigningstallet i et punkt $(x_0, f(x_0))$ på grafen til f. En kan dermed definere den deriverte, f', som

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} .$$

Her ble nevner forenklet ved $(x_0 + h) - x_0 = h$. På videregående vil en lære seg flere kjekke teknikker for å forenkle regningen ovenfor. Klarer du å vise at $f(x) = x^2$ fører til at $f'(x) = 2x$, ved å bruke definisjonen ovenfor?

Uten å presentere bevis, har en for $f(x) = x^n$

$$f'(x) = nx^{n-1}, \tag{♠}$$

hvor n er et rasjonelt tall. Dersom f inneholder flere ledd, kan de behandles hver for seg ved å bruke regelen ovenfor. For en lineær funksjon $f(x) = ax + b$, gir dette $f'(x) = (ax)' + b' = a$. At den deriverte av en konstant b er lik null, kan betraktes grafisk. En konstant funksjon er en rett linje parallell med x-aksen, den stiger altså aldri.

8.8 INTEGRASJON*

Helt siden de gamle grekerene begynte å studere geometri, har en vært interessert i omkrets, areal og volum av ulike figurer. Hva med arealet under en graf? I mange tilfellet er vi interessert i å bestemme arealet under en funksjon. Dette kan for eksempel sees på som å finne arealet av en husvegg, hvor toppen kan beskrives av en funksjon $f(x)$ og de tre andre sidene er rette. Metoden med å beregne arealet under ulike funksjoner kalles integrasjon. En av de største matematiske bragdene på 1700-tallet var å vise at derivasjon og integrasjon er motsatte operasjoner. Den moderne notasjonen er

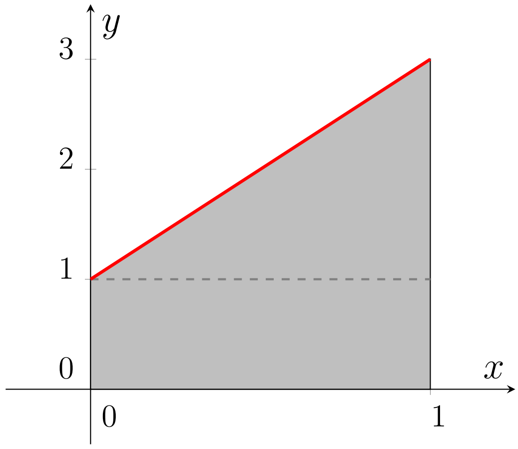
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,,$$

der venstre side leses som "arealet avgrenset av funksjonen $f(x)$, x-aksen og de parallele linjene $x = a$ og $x = b$". Høyre side er her en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$. Funksjonen F betegnes ofte som den antideriverte av f. Ved å bruke (♠) kan en utlede den den generelle formelen

$$\int_a^b cx^n\mathrm{d}x = \frac{c}{n+1}x^{n+1}\bigg|_a^b,$$

hvor $f(x)\mid_a^b$ betyr $f(b) - f(a)$.

Dersom vi har en lineær funksjon $f(x) = 2x + 1$, kan vi for eksempel bestemme arealet under grafen f mellom $x_1 = 0$ og $x_2 = 1$ ved integrasjon.



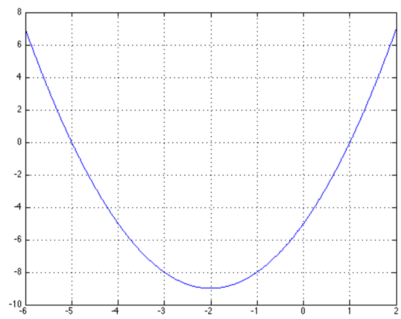
Innsetting i formel gir da

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x+1\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{1+1}x^{1+1}+\frac{1}{0+1}x^{0+1}\Big|_0^1 \\ &= x^2+x\big|_0^1 \\ &= (1^2+1)-(0^2-0) \\ &= 2\end{aligned}$$

Alternativt kan området betraktes som summen av en trekant og et kvadrat, som igjen er et trapes. Arealet til de nevnte figurene er kjent fra geometrien.

8.9 ANNENGRADSFUNKSJONER*

Annengradsuttrykk har allerede blitt introdusert i kompendiet under delen *Tall og algebra*. Der ble det blant annet slått fast at annengradsuttrykk kan skrives som $(x-x_1)(x-x_1)$.



I figuren ovenfor har vi et annengradsuttrykk gitt som $x^2 + 4x - 5$. Dette er et uttrykk som har den generelle formen som en *parabel*. En parabel er kjennetegnet ved at den har et brennpunkt og en symmetriakse. Brennpunktet er ikke pensum før universitetskalkulus, men symmetriaksen er derimot noe som enkelt kan finnes.

La oss ta for oss et generelt uttrykk for en parabel: $ax^2 + bx + c$. Hvis vi ønsker å finne grafens skjæringspunkter med x-aksen kan vi ganske enkelt følge den berømte *annengradsformelen*:

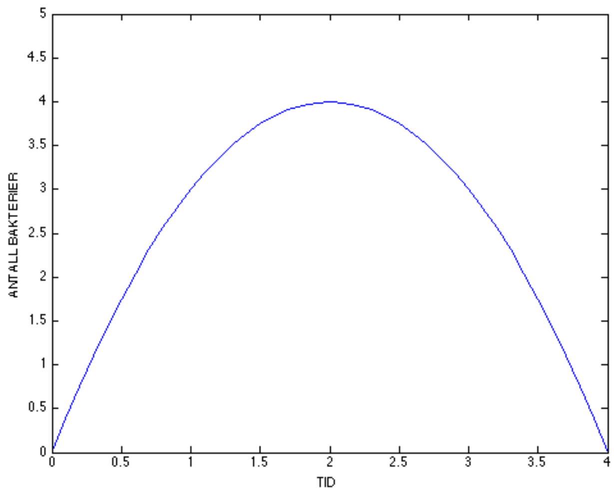
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ettersom vi har et pluss-minustegn vil vi få null, en eller to reelle uttrykk for x, som forventet ved å se på grafen. Disse verdiene for x er også kjent som *røtter*, eller *nullpunkter*, for uttrykket. Vi ser at vi får to ulike røtter dersom $b^2 - 4ac > 0$. Dersom $b^2 - 4ac = 0$ får vi en rot. For tilfellet $b^2 - 4ac < 0$ vil en få to komplekse røtter men disse skal ikke studeres nærmere her. For grafen gitt ovenfor ser vi at røttene er $x = -5 \wedge x = 1$. Uttrykket $f(x) = x^2 + 4x - 5$ kan dermed skrives som $f(x) = (x-1)(x+5)$. Symmetriaksen til parabelen er gitt ved følgende uttrykk: $x^* = -\frac{b}{2a}$. Denne aksen vil altså skjære gjennom parabelens ekstremalpunkt. Vi ser at dette skjer ved $-\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$. Toppunktet, eller bunnpunktet, vil derfor alltid være gitt ved $f(x^*)$.

8.10 Oppgaver

Oppgave 1

En *bakteriekultur* er et navn som brukes om en gruppe bakterier som lever og formerer seg innenfor et begrenset område. En *populasjon* av bakterier er videre definert som antall bakterier i bakteriekulturen, helt samsvarende med det engelske ordet population som gjerne brukes om folketall. Det er forventet at populasjonen vil øke frem til et visst punkt, før den så vil avta. La oss kalle populasjonen for g. Ettersom størrelsen utvikler seg med hensyn på tid, er det naturlig at $g = g(t)$. Hvis $g(t) = -t^2 + 4t$, når er det forventet at populasjonen vil ha avtatt til 0?



Løsning

Vi ønsker å finne funksjonens nullpunkter. Dette kan vi gjøre ved å sette $g(t) = 0$. Vi får da $-t^2 + 4t = 0$. Konvensjonen er å ha koeffisienten '1' foran andregradsleddet. Ligningen kan dermed skrives på følgende måte: $t^2 - 4t = 0$. Vi har dermed følgende verdier for koeffisientene a, b og c: $a = 1$, $b = -4$, $c = 0$. Vi setter dette inn i annengradsformelen:

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2}}{2} = 2 \pm 2$$

t er dermed lik 0 ved tiden $t = 0$ og $t = 4$.

OPPGAVE 2

I økonomien har vi definert noe som kalles *økonomisk effektivitet*. Dette dreier seg om et ønske om å maksimere produksjon eller tjenesteyting uten at det går på bekostning av samfunnet. Punktet hvor økonomisk effektivitet oppnås er gitt av skjæringspunktet mellom marginalkostnaden MC og etterspørselen D. Disse størrelsene er gitt som funksjoner av produserte enheter q (oppgitt i tusener) og er egentlig de deriverte funksjonene av henholdsvis totalkostnad C og inntjening R. $MC(q)$ og $D(q)$ er gitt som:

$$MC(q) = 3q$$
$$D(q) = 10 - 2q$$

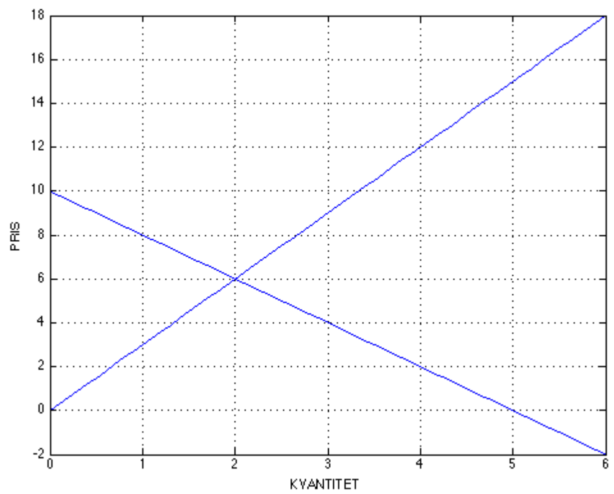
Finn punktet hvor økonomisk effektivitet er maksimert.

Løsning

Vi trenger å finne punktet som oppfyller $MC(q) = D(q)$.

$$3q^* = 10 - 2q^*$$
$$5q^* = 10$$
$$q^* = 2$$

Produksjonen som maksimerer økonomisk effektivitet er altså $q^* = 2000$ enheter. Vi kan finne den korresponderende prisen ved å sette $MC(q^*)$. Dette blir $P = 3 \cdot 2000 = 6000$. Dette stemmer også med vår grafiske modell:



OPPGAVE 3

Den mest fundamentale formelen for elkraftingeniører er kjent som Ohms lov. Denne formelen sier noe om forholdet mellom strøm og spenning og er gitt som $V = RI$, der V er spenning i volt (V), R er en reell motstand gitt i ohm (Ω) og I er strømmen gitt i ampere (A). Bestem grenseverdiene for strømmen I som en funksjon av R ved spenning $V = 230V$.

Løsning

Grenseverdier er et begrep som egentlig ikke er formelt innført i ungdomsskolepensumet. Likevel er det en veldig anvendelig og god måte å se på grafer og funksjoner på. En grenseverdi sier ganske enkelt noe om hvilken verdi en funksjon *konvergerer* til, eller går mot, når funksjonsvariablen nærmer seg en gitt verdi.

Vi må først finne et uttrykk for $I(R)$. Dette er gitt som $I(R) = \frac{V}{R} = \frac{230}{R}$. Reelle, ohmske motstander er definert ved positive tall. Grenseverdiene for $I(R)$ er dermed gitt når R går mot 0 eller uendelig.

$$\lim_{R\to 0} I(R) = \lim_{R\to 0} \frac{230}{R} \to \infty$$
$$\lim_{R\to \infty} I(R) = \lim_{R\to \infty} \frac{230}{R} \to 0$$

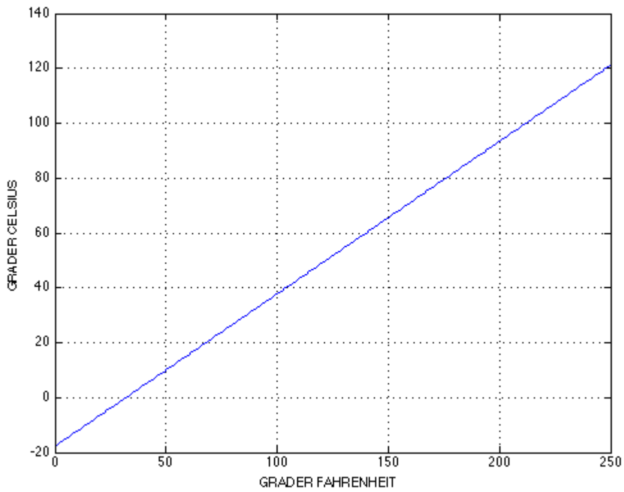
I det første tilfellet har vi en kortslutning. Dette innebører at vi har en svært liten indre motstand, slik at strømmen kan flyte nærmest ubegrenset. I virkeligheten vil dette føre til så stor varmegang at ledningene vil smeltes, slik at strømmen gjerne bare når noen få kiloampere. I motsatt fall har vi null strøm. Dette tilsvarer en åpen krets, noe som kan eksemplifiseres med brudd på en ledning e.l.

OPPGAVE 4

I USA benytter man seg av en annen målestokk for temperatur enn hva som er vanlig i Europa. Temperaturer i Fahrenheit- og Celsius-skalaer kan heldigvis enkelt konverteres fram og tilbake ved hjelp av en meget enkelt formel. La oss si at vi har en temperatur i Fahrenheit T_F som vi ønsker å konvertere til celsius T_C. Formelen er gitt som følger:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

Dette kan vises grafisk. Her har vi grader celsius (T_C) langs y-aksen og grader fahrenheit (T_F) langs x-aksen.

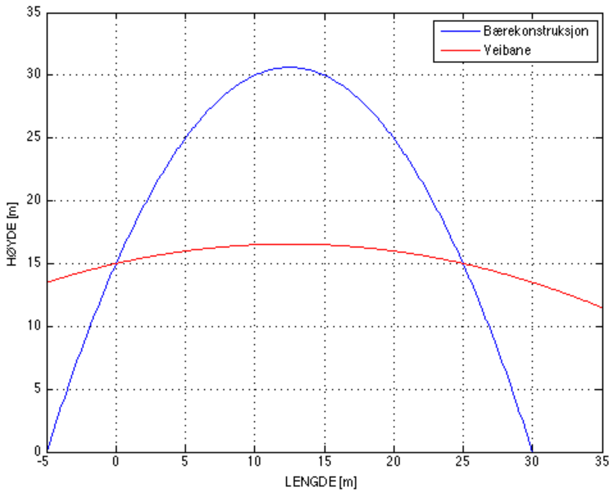


Vi ser at det altså er en lineær sammenheng mellom grader i celsius- og fahrenheitskalaen. La oss finne punktene for henholdsvis $0F$ og $100F$. Først setter vi $T_C(0F) = \frac{5}{9}(0 - 32) = -17,8°C$, deretter $T_C(100F) = \frac{5}{9}(100 - 32) = 37,8°$. Om det var disse punktene som ble brukt som utgangspunkt da Fahrenheit lagde sin temperaturskala vites ikke. Men det er likevel et par interessante ting å merke seg ved disse temperaturpunktene. $-17,8°$ virker kanskje som en tilforlatelig temperatur. Men tilfellet er at denne temperaturen er (ganske nøyaktig) det kaldeste man kan oppnå ved å blande riktige mengder salt og knust is. Dette er et eksempel på en endoterm reaksjon, det vil si en reaksjon som absorberer varme fra omgivelsene. Dette er riktignok ikke pensum før videregående kjemi.

Den andre temperaturen er $37,8°C$. Dette er like over vanlig kroppstemperatur.

OPPGAVE 5

En buebro er en brokonstruksjon hvor en bue er den bærende konstruksjonen. Den nyeste Svinesundsbroen er et godt eksempel på dette. La oss anta at vi skal lage en slik bro. Vi har en buekonstruksjon som er gitt ved $g(x) = -0.1x^2 + 2,5x + 15$, der x er oppgitt i meter. Videre har vi en veibane som er gitt ved funksjonen $f(x) = -0,01x^2 + 0,25x + 15$. Dette er vist ved følgende figur:



Denne figuren viser broen sett fra siden. Som vi ser skjærer kurven for veibanen og kurven for bærekonstruksjonen hverandre i punktet $(0, 15)$. Vi ser at neste skjæringspunkt er i $(25, 15)$. Verifiser dette ved hjelp av regning.

Løsning

For å finne skjæringspunktene mellom $g(x)$ og $f(x)$ må vi løse en annengradslikning. Vi begynner med å sette $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} -0,1x^2 + 2,5x + 15 &= -0.01x^2 + 0,25x + 15 \\ -0,09x^2 + 2,25x &= 0 \\ x^2 - 25x &= 0 \end{aligned}$$

Vi har nå etablert en annengradslikning som kan løses på vanlig måte. Merk at $c = 0$. Dette innebærer at en av løsningene for x må bli 0. Fra figuren vet vi at dette er tilfellet.

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2}}{2} = 0 \text{ m} \wedge 25 \text{ m}$$

Vi kan sette inn disse verdiene i en av funksjonene for å finne y-verdiene: $f(0) = 0,01 \cdot 0^2 + 0,25 \cdot 0 + 15 = 15$ m og $f(25) = -0,1 \cdot 25^2 + 2,5 \cdot 25 + 15 = 15$ m. Vi har da vist at bærekonstruksjonen og veibanen skjærer hverandre i $(0,15)$ og $(25,15)$.